# ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

Αποθέματα

Πρόβλεψη

Προγραμματισμός

Γιάννης Α. Φίλης

Μάρτιος 2006

Πολυτεχνείο Κρήτης

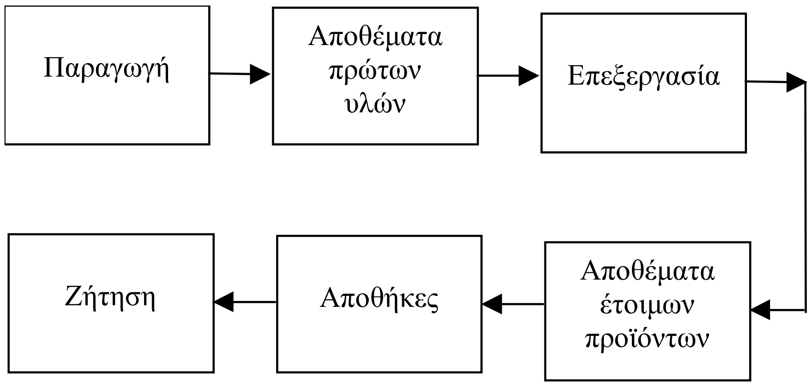
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

# I ΕΙΣΑΓΩΓΗ

## 1.1. Ανάλυση Συστημάτων Παραγωγής

**Σύστημα παραγωγής** είναι το σύνολο όλων των διαδικασιών που μετατρέπουν τις πρώτες ύλες σε έτοιμα προϊόντα.

Το διάγραμμα ροής ενός συστήματος παραγωγής είναι το ακόλουθο:




Η **χωρητικότητα** ενός συστήματος παραγωγής ορίζεται από τον αριθμό εργατικών χεριών και μηχανημάτων του συστήματος.

**Απόθεμα παραγωγής** είναι το σύνολο των υλικών που βρίσκονται στο στάδιο της επεξεργασίας ή περιμένουν επεξεργασία.

Τρία χαρακτηριστικά της παραγωγής μας ενδιαφέρουν:

1. **Ποσότητα / χρόνο**: Η ποσότητα υλικών που επεξεργαζόμαστε ανά μονάδα χρόνου.
2. **Ποιότητα**: Ο βαθμός προσέγγισης με τις προδιαγραφές.
3. **Κόστος**.

Θ' ασχοληθούμε με το πρώτο χαρακτηριστικό.

Υπάρχουν 4 είδη συστημάτων παραγωγής.

**α. Συνεχή** (continuous production systems)

Παράγουν μερικά, στενά σχετιζόμενα προϊόντα (π.χ. βιομηχανία κονσερβών).

**β. Διακοπτόμενα** (intermittent production systems).

Παράγουν διάφορα προϊόντα που δεν έχουν στενή σχέση μεταξύ τους και οι εγκαταστάσεις πρέπει να προσαρμόζονται στα εκάστοτε προϊόντα (π.χ. βιομηχανία πλυντηρίων, ψυγείων κ.λπ.). Αν τα περισσότερα προϊόντα έχουν τον ίδιο δρόμο (δρόμος από μηχανή σε μηχανή π.χ.) παραγωγής τότε η διαδικασία λέγεται **κατάστημα ροής** (flow shop). Αν έχουμε διαφορετικά προϊόντα, τότε οργανώνουμε τις εγκαταστάσεις σε **καταστήματα εργασιών** (job shop). Κατάστημα εργασίας είναι ένα σύνολο παραγωγής όπου γίνονται ορισμένες διεργασίες (π.χ. μηχανουργείο).

**γ. Έργα** (projects).

Εδώ παράγουμε ένα ή λίγα προϊόντα (π.χ. το space shuttle, η κατασκευή ενός διϋλιστηρίου).

**δ. Καθαρά Αποθεματικά Συστήματα** (pure inventory systems).

Σ' αυτά τα συστήματα υπάρχει μόνο προμήθεια αλλά όχι παραγωγή (π.χ. Μινιόν).

## 1.2. Λήψη Αποφάσεων

Οι αποφάσεις που σχετίζονται με τα συστήματα παραγωγής και που θα εξετάσουμε εδώ είναι του τύπου μεγίστου-ελαχίστου. Μεγιστοποιούμε φερ' ειπείν το κέρδος ή ελαχιστοποιούμε το κόστος. Έχουμε 3 ειδών αποφάσεις:

1. **Μακροχρόνιες** (long-range): Εγκαταστάσεις, γραμμές παραγωγής, πολιτική εξυπηρέτησης πελατών.
2. **Ενδιάμεσες** (intermediate-range): Στόχοι για το μέγεθος αποθεμάτων, σχέδια προμηθειών, μέγεθος εργατικού δυναμικού.
3. **Βραχυχρόνιες** (short-range): Προγραμματισμός παραγωγής, αποφάσεις για υπερωρίες, ανάθεση εργασιών.

# II ΑΠΟΘΕΜΑΤΑ

**(Inventory Systems)**

## 2.1 Εισαγωγή

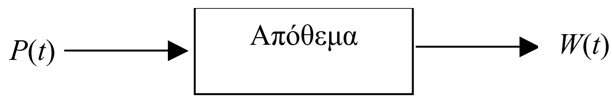
Αρχίζουμε με τον ορισμό των ακόλουθων μεγεθών:

$P(t)$ : ρυθμός που υλικά προστίθενται στο απόθεμα

$D(t)$ : ρυθμός ζήτησης

$W(t)$ : ο πραγματικός ρυθμός που υλικά αφαιρούνται από το απόθεμα

= $D(t)$ + (ρυθμός ικανοποίησης παλαιών παραγγελιών, πελατών που δεν είχαν εξυπηρετηθεί αμέσως λόγω έλλειψης αποθέματος)




$I(t)$ : απόθεμα τη χρονική στιγμή $t$ (κομμάτια που βρίσκονται στην αποθήκη)

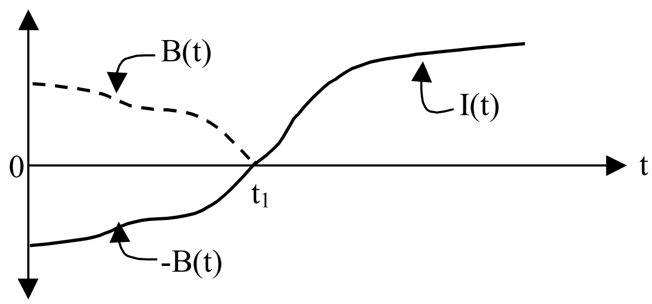
$B(t)$ : πλήθος παλαιών παραγγελιών που δεν έχουν ικανοποιηθεί μέχρι τη στιγμή $t$

$\Omega(t)$ : ποσότητα που έχουμε παραγγείλει μέχρι τη στιγμή $t$

$Y(t)$ : καθαρό απόθεμα = απόθεμα − παραγγελίες που δεν έχουν ικανοποιηθεί = $I - B$.

$X(t)$ : αποθεματική θέση = καθαρό απόθεμα + ποσότητα που έχουμε παραγγείλει $=Y+\Omega$.

Υποθέτουμε ότι καθώς ικανοποιούμε παραγγελίες $B(t)$ τότε δεν έχουμε απόθεμα $I(t)$. Έχουμε λοιπόν ένα σχήμα της μορφής:




Έτσι

$$Y(t) = \begin{cases} -B(t), & t \in [0, t_1] \\ I(t), & t \in [t_1, \infty] \end{cases} \qquad (2.1.\alpha)$$

Επίσης

$$Y(t) = I(t) - B(t) \tag{2.1.β}$$

$$X(t) = Y(t) + \Omega(t). \tag{2.2}$$

Επειδή τα $P$, $D$ και $W$ είναι ρυθμοί, προφανώς

$$\dot{Y}(t) = P(t) - D(t)\,. \tag{2.3}$$

Χρησιμοποιήσαμε $D$ αντί για $W$ επειδή το $W$ ικανοποιεί τη ζήτηση αλλά και παραγγελίες του παρελθόντος $B$. Προφανώς $D = W$ όταν $B = 0$. Από την (2.3) προκύπτει

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \left[P(\tau) - D(\tau)\right] d\tau \tag{2.4}$$

Από την (2.1α) βλέπουμε ότι

$$I(t) = \max\,[0, Y(t)]$$

$$B(t) = \min\,[0, Y(t)].$$

και

$$W(t) = \begin{cases} -D(t), & \text{αν } Y(t) > 0 \text{ — εδώ ικανοποιούμε τη ζήτηση} \\ 0, & \text{αν } Y(t) = 0 \\ P(t), & \text{αν } Y(t) < 0 \text{ — εδώ ικανοποιούμε παλιές παραγγελίες} \end{cases}$$

Αν $B(t) = 0 \Rightarrow Y(t) \geq 0 \Rightarrow W(t) = \begin{cases} D(t) \\ 0 \end{cases}$

$$\text{και } Y(\text{t}) = I(0) = \int_0^t [P(t) - W(t)]\,d\tau\,. \tag{2.5}$$

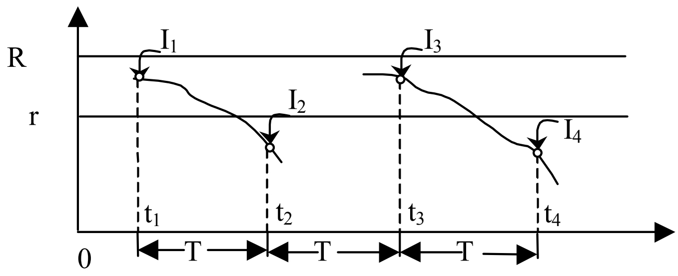
Αβεβαιότητες στο σύστημα: $D(t)$ είναι στοχαστική διαδικασία.

## 2.2 Στρατηγικές ελέγχου αποθεμάτων (Inventory policies)

Έστω ότι παρατηρούμε το απόθεμα περιοδικά κάθε $T$ μονάδες χρόνου και όταν η στάθμη του πέσει κάτω από ένα σημείο $r$ τότε παραγγέλουμε μια ποσότητα για ν' ανεβάσουμε τη στάθμη στο σημείο $R$. Έχουμε τότε την

1. Στρατηγική περιοδικού *R-r* ελέγχου

(Periodic-review $R$-$r$ policy)




$T$ : περίοδος ελέγχου

$r$ : σημείο παραγγελίας

$R$ : αποθεματικός έλεγχος

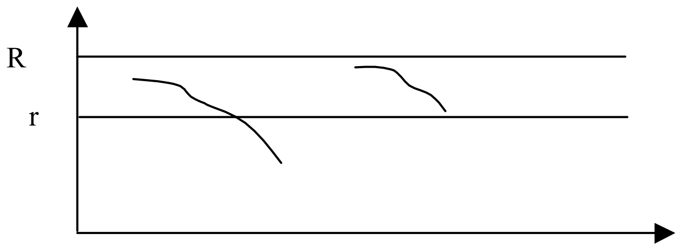
Στην παρατήρηση $j$ η ποσότητα παραγγελίας είναι

$$Q_j = \begin{cases} 0, & I_j > r \\ R - I_j, & I_j \le r \end{cases}.$$

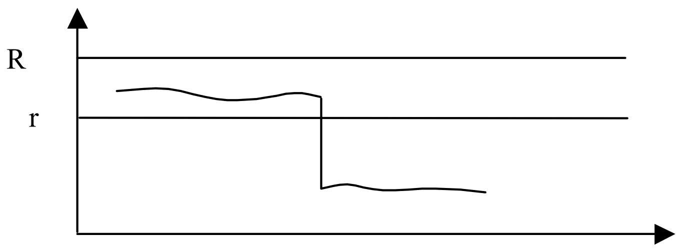
Αν $r = R$ τότε σε κάθε σημείο ελέγχου $Q_j = R - I_j$.

2. Συνεχής ($R$, $r$) στρατηγική

(continuous-reniew ($R$, $r$) policy)

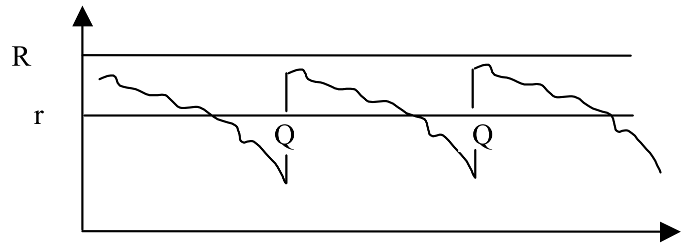



Εδώ $T \to 0$ και $Q(t) = R - I(t)$. Θα έπρεπε να γράψουμε $Q(t) = R - r$ αλλά υπάρχει περίπτωση απότομης (βηματικής) βύθισης:




3. Στρατηγική Δεδομένης Ποσότητας ($Q$, $r$)

(Fixed reorder policy)




## 2.3 Αιτιοκρατικά, ενός είδους, μοντέλα στατικής ζήτησης

## (Deterministic, single-item models with static demand)

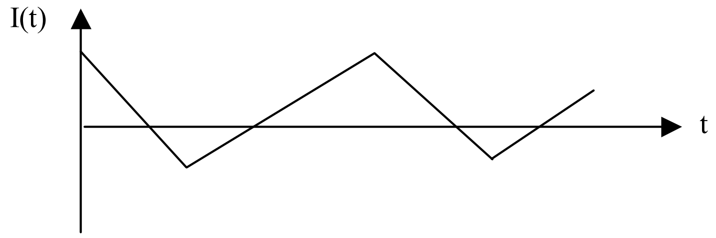
**Υποθέσεις**: α. Απόθεμα μ’ ένα είδος.

β. Ρυθμός ζήτησης γνωστός και σταθερός.

**Πρόβλημα**: Πόσο και πότε πρέπει να παραγγελθεί;

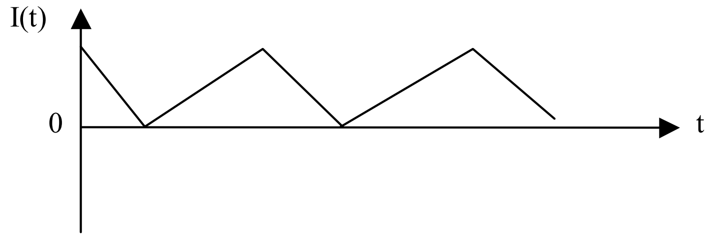
Έχουμε 4 περιπτώσεις:

**I.** Πεπερασμένος ρυθμός με επιτρεπόμενη αρνητική στάθμη.

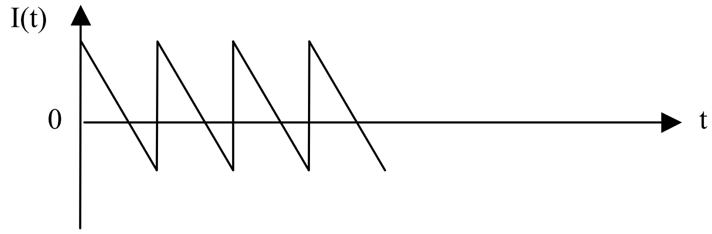



Αρνητικό απόθεμα σημαίνει ότι η ζήτηση θα ικανοποιηθεί μόλις φθάσουν νέα υλικά.

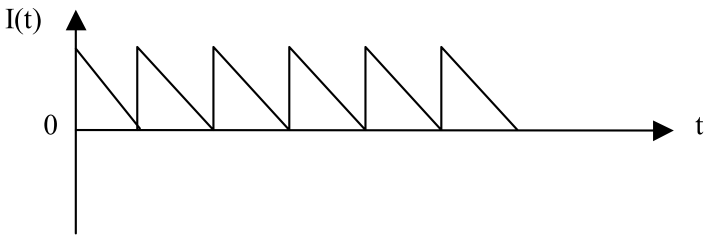
**II.** Πεπερασμένος ρυθμός εισόδου μη επιτρεπόμενη αρνητική στάθμη:



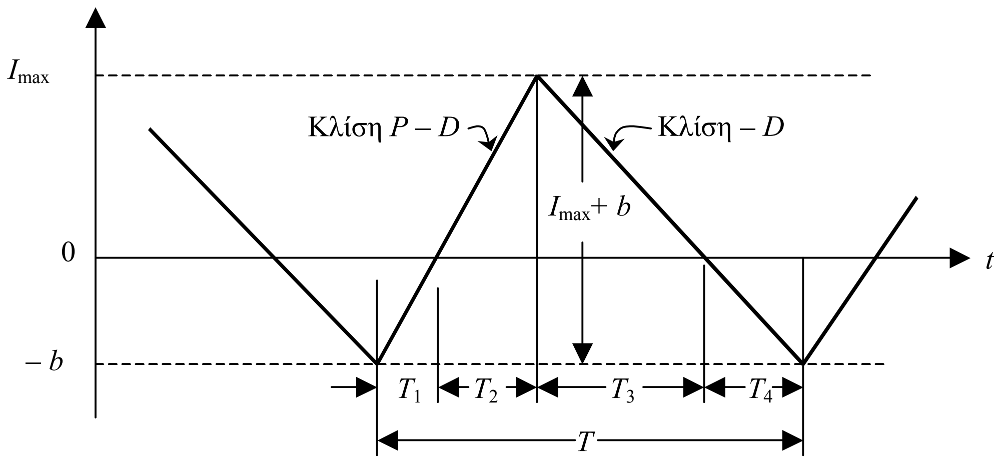

**III.** Άπειρος ρυθμός εισόδου με επιτρεπόμενη αρνητική στάθμη.



**IV.** Άπειρος ρυθμός εισόδου μη επιτρεπόμενη αρνητική στάθμη.




Εξετάζουμε την πρώτη περίπτωση την οποία στο εξής θα αναφέρουμε ως **Μοντέλο I**.




Έστω

$I_{max}$ : μέγιστο ανά χείρας απόθεμα

$Q$ : ποσότητα παραγγελίας

$P$ : ρυθμός παραγωγής / χρόνο

$D$ : ρυθμός ζήτησης / χρόνο

$b$ : μέγιστη επιτρεπόμενη στάθμη παραγγελιών που δεν έχουν ικανοποιηθεί.

Από το σχήμα

$$I_{max} + b = T_p(P-D). \tag{2.6}$$

Η ποσότητα $Q$ παρέχεται σε χρόνο $T_p$ και με ρυθμό $P$

$$Q = PT_p. \tag{2.7}$$

(2.6), (2.7) $\Rightarrow$ $\qquad I_{max} = \dfrac{Q}{P}(P-D) - b.$

Επίσης από το σχήμα:

$$T_1 = \frac{b}{P - D}$$

$$T_2 = \frac{I_{\max}}{P - D}$$

$$T_3 = \frac{I_{\max}}{D}$$

$$T_4 = \frac{b}{D}.$$

Το μέσο απόθεμα $\bar{I}$ είναι

$$\bar{I} = \frac{1}{T}\int I(t)dt = \frac{1}{T}\left[\frac{1}{2}(T_2 + T_3)I_{\max}\right]$$

$$= \frac{1}{T}\frac{\left[Q(P-D) - Pb\right]^2}{2P^2}\frac{P}{(P-D)D} = \frac{\left[Q\left(1 - \frac{D}{P}\right) - b\right]^2}{2Q\left(1 - \frac{D}{P}\right)}.$$

Η μέση τιμή παραγγελιών που δεν ικανοποιήθηκαν είναι

$$\bar{B} = \frac{1}{T}\left(\frac{1}{2}bT_1 + \frac{1}{2}bT_4\right) = \frac{b^2 P}{2Q(P-D)}.$$

Ορίζουμε τον ακόλουθο συμβολισμό:

$A$ : σταθερό κόστος μιας παραγγελίας (κόστος προώθησης παραγγελίας, λογιστές κ.λπ.)

$C$ : μοναδιαίο μεταβλητό κόστος (κόστος κάθε μονάδας)

$h$ : κόστος αποθέματος ανά μονάδα ανά έτος˙ υποθέτουμε $h = iC$, όπου $i$ είναι ένα ποσοστό % του $C$ ανά έτος

$\Pi$ : κόστος έλλειψης αγαθού ανά μονάδα, ανεξάρτητο από τη διάρκεια έλλειψης

$\hat{\Pi}$ : κόστος έλλειψης αγαθού ανά μονάδα ανά χρόνο

$\tau$ : χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα στη ζήτηση και τη λήψη παραγγελίας

$r$ : σημείο παραγγελίας

$K$ : μέσο κόστος αποθέματος ανά έτος

Υπολογίζουμε το κόστος $K$ λειτουργίας του συστήματος ανά μονάδα χρόνου ως εξής:

Μέσο κόστος / κύκλο = κόστος παραλαβής + κόστος αποθέματος + κόστος έλλειψης.

$$= \left(A + CQ\right) + \left(h\,\bar{I}\,T\right) + \left(\hat{\Pi}\,T\,\overline{B} + \Pi\,b\right).$$

όπου $T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = \dfrac{Q}{D} \quad \left( = \dfrac{\text{ποσότητα}}{\text{ποσότητα/χρόνο}} \right)$, και η συχνότητα σε κύκλους είναι

$$\frac{1}{T} = \frac{D}{Q} \text{ κύκλοι ανά μονάδα χρόνου.}$$

Προφανώς

$K$ = (Μέσο κόστος / κύκλο) × (κύκλοι ανά μονάδα χρόνου), ή

$$K = \frac{DA}{Q} + CD + h\bar{I} + \hat{\Pi}\overline{B} + \frac{PbD}{Q}.$$

Χρησιμοποιούμε τις εκφράσεις για το $\bar{I}$ και $\overline{B}$ που βρήκαμε και $h = iC$,

$$K(Q,b) = \frac{AD}{Q} + CD + \frac{iC\left[Q\left(1 - \frac{D}{P}\right) - b\right]^2}{2Q\left(1 - \frac{D}{P}\right)} + \frac{\hat{\Pi}\,b^2}{2Q\left(1 - \frac{D}{P}\right)} + \frac{\Pi\,bD}{Q}.$$

Θέλουμε να βρούμε το βέλτιστο σημείο ($Q^*$, $b^*$) ώστε το $K$ να γίνει ελάχιστο.

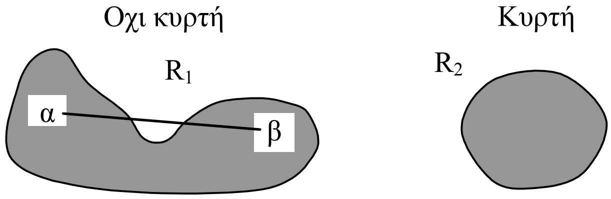
Η αναγκαία συνθήκη για ένα ακρότατο (τοπικό) είναι

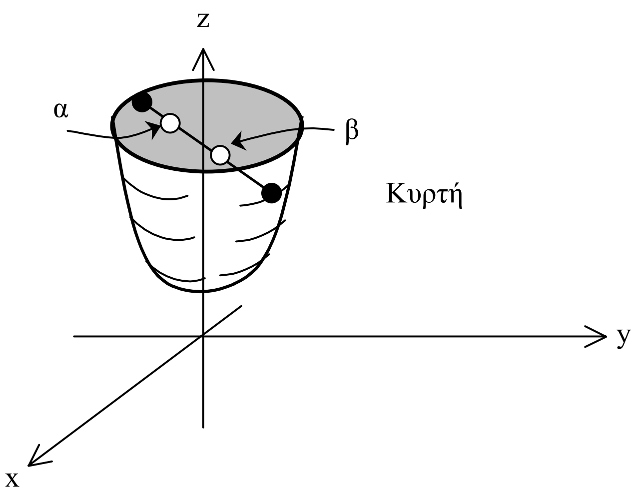
$$\frac{\partial K}{\partial Q} = \frac{\partial K}{\partial b} = 0.$$

Για να είναι το ακρότατο απόλυτο ελάχιστο πρέπει να δείξουμε ότι το $K$ είναι κυρτό $\cup$ για όλα τα ($Q$, $b$). Μία πραγματική συνάρτηση $f$ ενός διανύσματος είναι απολύτως (αυστηρά) κυρτή $U$ σε μια κυρτή περιοχή $R$ ενός διανυσματικού χώρου αν για όλα τα $\alpha, \beta \in R$ με $\alpha \neq \beta$ και κάθε $\theta$, $0<\theta<1$, το ακόλουθο ισχύει

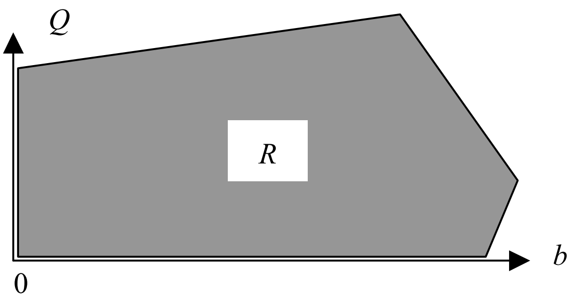
$$\theta\, f(a) + (1-\theta) f(\beta) > f\left[\theta\alpha + (1-\theta)\beta\right].$$

Μία περιοχή $R$ ενός διανυσματικού χώρου είναι κυρτή αν για κάθε $\alpha$, $\beta \in R$ το σημείο $\theta\,\alpha + (1-\theta)\beta$ ανήκει στην $R$




δηλαδή η γραμμή που ενώνει κάθε $\alpha$, $\beta$ βρίσκεται μέσα στο χώρο. Η περιοχή των $Q$ και $b$ είναι το σύνολο σημείων $R = \{(Q, b)$ όπου $Q \geq 0,\ b \geq 0\}$




που είναι κυρτή.

Έστω ότι το $b$ είναι σταθερό και

$$K = \frac{2\left(1-\frac{D}{P}\right)\left(AD + \Pi\, bD\right) + \hat{\Pi}\, b^2 + iC\left[Q\left(1-\frac{D}{P}\right) - b\right]^2}{2\left(1-\frac{D}{P}\right)} \frac{1}{Q} + CD$$

$$= \frac{M + iC\left(\lambda Q - b\right)^2}{2\lambda Q} + CD$$

όπου $\lambda = 1 - \dfrac{D}{P} > 0 \Rightarrow P > D \Rightarrow K > 0,\ \forall b$

και $M = 2\left(1 - \dfrac{D}{P}\right)\left(AD + \Pi bD\right) + \hat{\Pi} b^2$.

Θα εξετάσουμε την κυρτότητα του $K$ για $\forall\ Q$ (το $b$ είναι σταθερό). Πρέπει

$$\theta \frac{M + iC(\lambda Q_1 - b)^2}{2\lambda Q_1} + (1-\theta)\frac{M + iC(\lambda Q_2 - b)^2}{2\lambda Q_2} + CD >$$

$$> \frac{M + iC\left[\lambda\theta Q_1 + (1-\theta)\lambda Q_2 - b\right]^2}{2\lambda\left[\theta Q_1 + (1-\theta)Q_2\right]} + CD \ ,\forall Q_1, Q_2.$$

Αγνοούμε τους θετικούς όρους $2\lambda$ και εξετάζουμε τις ανισότητες

$$\frac{\theta M}{Q_1} + \frac{(1-\theta)M}{Q_2} > \frac{M}{\theta Q_1 + (1-\theta)Q_2}$$

που ισχύει για κάθε $Q_1 \neq Q_2$ (η συνάρτηση $M/Q$ είναι κυρτή), και την

$$\frac{\theta iC(\lambda Q_1 - b)^2}{Q_1} + \frac{(1-\theta)iC(\lambda Q_2 - b)^2}{Q_2} > \frac{iC\left[\lambda\theta Q_1 + (1-\theta)\lambda Q_2 - b\right]^2}{\theta Q_1 + (1-\theta)Q_2}$$

που ισχύει επίσης αφού

$$\begin{cases} \theta(1-\theta)(Q_1 - Q_2)^2 > 0 \\ iC\theta b^2(1-\theta)(Q_1 - Q_2)^2 > 0 \end{cases} \quad \forall Q_1 \neq Q_2.$$

Άρα το $K$ είναι κυρτό για $\forall Q$.

Τώρα θεωρούμε το $Q$ σταθερό. Τότε

$$K = \frac{iC(Q\lambda - b)^2 + \hat{\Pi} b^2 + 2\Pi D\lambda b}{2Q\lambda} + CD + \frac{AD}{Q}.$$

Πρέπει

$$\theta \frac{iC(Q\lambda - b_1)^2 + \hat{\Pi} b_1^2 + 2\Pi D\lambda b_1}{2Q\lambda} + (1-\theta)\frac{iC(Q\lambda - b_2)^2 + \hat{\Pi} b_2^2 + 2\Pi D\lambda b_2}{2Q\lambda} >$$

$$> \frac{iC}{2Q\lambda}\Big[\left[Q\lambda - \theta b_1 - (1-\theta)b_2\right]^2 + \hat{\Pi}\left[\theta b_1 + (1-\theta)b_2\right]^2 + 2\Pi D\lambda\left[\theta b_1 + (1-\theta)b_2\right]\Big]$$

ή μετά από λίγη άλγεβρα

$$\hat{\Pi}\theta(1-\theta)\left[(b_1-b_2)^2 + b_1^2(1-\theta)\right] + \theta(1-\theta)(b_1-b_2)^2 > 0$$

που ισχύει για κάθε $b_1 \neq b_2$. Από τις αναγκαίες συνθήκες ακροτάτου ευρίσκουμε

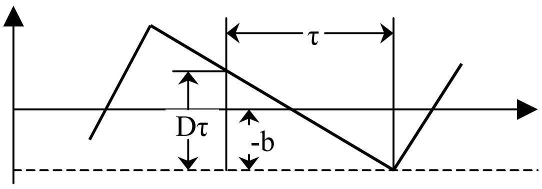
$$\boxed{\begin{gathered} Q^* = \sqrt{\left[\frac{2AD}{iC\left(1-\dfrac{D}{P}\right)} - \frac{(\Pi D)^2}{iC(iC+\hat{\Pi})}\right]\frac{iC+\hat{\Pi}}{\hat{\Pi}}}\,, \\ b^* = \frac{\left(iCQ^* - \Pi D\right)\left(1-\dfrac{D}{P}\right)}{iC+\hat{\Pi}},\ \ \hat{\Pi} \neq 0\,. \end{gathered}}$$

Αν οι αριθμοί $\Pi$ και $\hat{\Pi}$ δίνουν πραγματικό $Q^*$ τότε ισχύουν οι προηγούμενοι τύποι. Αν το $Q^*$ είναι φανταστικό τότε θέτουμε $b^* = 0$ και μεταπηδούμε στο Μοντέλο ΙΙ.

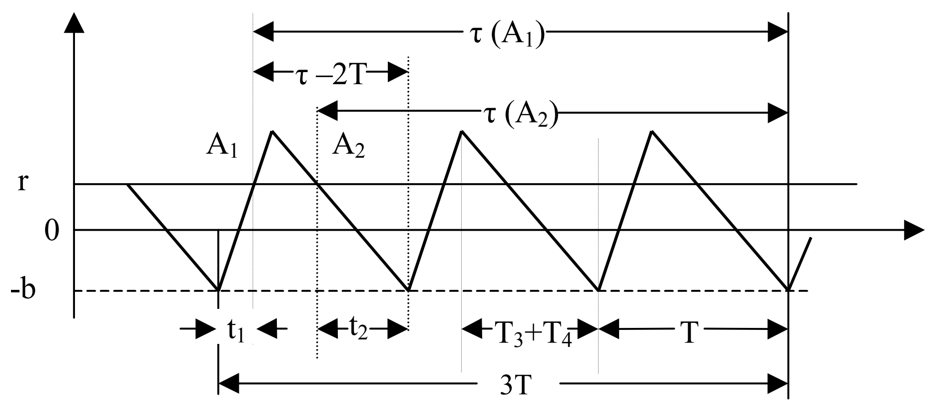
Αν $\hat{\Pi} = 0$ και $\Pi \neq 0$, τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι $b^* = 0$ ή $Q^* = 0$. Η δεύτερη περίπτωση σημαίνει ότι δεν κρατούμε καθόλου στοκ αλλά παραγγέλλουμε όλα τα είδη με τη μορφή $b \neq 0$ και ικανοποιούμε τη ζήτηση μονομιάς.

Παραγγέλλουμε αγαθά όταν το απόθεμα πέσει κάτω από το σημείο

$D\tau - b =$ (Ρυθμός ζήτησης) $\times$ (χρόνος άφιξης παραγγελίας) $-$ (παραγγελίες του παρελθόντος).




Ο χρόνος όμως άφιξης παραγγελίας μπορεί να υπερβεί μία περίοδο παραγωγής.




Από το σχήμα βλέπουμε ότι αν $m$ είναι οι περίοδοι παραγωγής που ακολουθούν το σημείο παραγγελίας Α, τότε αν

$\tau - mT > T_3 + T_4$ (I)

το σημείο αυτό συμπίπτει με το $A_1$, ενώ αν

$\tau - mT \le T_3 + T_4$ (II)

αυτό συμπίπτει με το $A_2$.

Στην περίπτωση (I) το καθαρό απόθεμα είναι:

$$(P-D)t_1 - b = \left[(m+1)T - \tau\right](P-D) - b = \left[(m+1)\frac{Q}{D} - \tau\right](P-D) - b.$$

Για την (II) έχουμε:

$$Dt_2 - b = D(\tau - mT) - b = D\tau - b - \frac{DmQ}{D} = D\tau - b - mQ\,.$$

Άρα το σημείο παραγγελίας είναι:

$$r = \begin{cases} \tau D - mQ - b, & \text{αν } \tau - mT \le T_3 + T_4 \\ \left[(m+1)\dfrac{Q}{D} - \tau\right](P-D) - b\,, & \text{αν } \tau - mT > T_3 + T_4 \end{cases}$$

Παρατήρηση: $m = \mathrm{int}\left(\dfrac{\tau}{T}\right) =$ μέγιστος ακέραιος $\le \dfrac{\tau}{T}$.

**Μοντέλο ΙΙ**

Εδώ $b = 0$, οπότε

$$K = \frac{AD}{Q} + CD + iC\frac{Q}{2}\left(1 - \frac{D}{P}\right).$$

Απ' όπου

$$Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{iC\left(1 - \dfrac{D}{P}\right)}}$$

και $r$ είναι όπως στο μοντέλο Ι για $b = 0$.

**Μοντέλο ΙΙΙ**

Εδώ $P \to \infty$. Άρα

$$K=\frac{AD}{Q}+CD+iC\frac{(Q-b)^2}{2Q}+\frac{2\Pi Db+\hat{\Pi}b^2}{2Q}$$

$$Q^*=\sqrt{\left[\frac{2AD}{iC}-\frac{(\Pi D)^2}{iC(iC+\hat{\Pi})}\right]\frac{iC+\hat{\Pi}}{\hat{\Pi}}}\,,$$

$$b^*=\frac{iCQ^*-\Pi D}{iC+\hat{\Pi}}\,,$$

$$r=\tau D-mQ^*-b^*\,.$$

**Μοντέλο IV**

Σ’ αυτήν την περίπτωση $P\rightarrow\infty$, $b = 0$ οπότε

$$K=\frac{AD}{Q}+CD+iC\frac{Q}{2}$$

$$\text{και}\quad Q^*=\sqrt{\frac{2AD}{iC}}\,,$$

$$r=\tau D-mQ^*\,.$$

**Παράδειγμα 2.1**

Μια εταιρεία αγοράζει βαλβίδες που χρησιμοποιεί με ρυθμό 200/έτος. Το κόστος κάθε βαλβίδας είναι \$ 50 και το κόστος κάθε παραγγελίας είναι \$ 5. Το ποσοστό $i$ είναι 10%. Το αμετάβλητο κόστος έλλειψης αγαθού είναι \$ 0.2 ανά μονάδα ενώ το μεταβλητό κόστος έλλειψης είναι \$ 10 ανά μονάδα ανά έτος. Ο χρόνος παραγγελίας-άφιξης είναι 6 μήνες. Εύρετε τα $Q^*$, $b^*$, $r^*$.

Από τα δεδομένα

$D = 200$, $i = 0.1$, $\Pi = 0.2$, $\hat{\Pi} = 10$, $C = 50$, $A = 5$, $\tau = 0.5$.

Χρησιμοποιούμε το μοντέλο III όπου $P\rightarrow\infty$ και $b\neq 0$

$$Q^*=\sqrt{\left[\frac{2AD}{iC}-\frac{(\Pi D)^2}{iC(iC+\hat{\Pi})}\right]\frac{iC+\hat{\Pi}}{\hat{\Pi}}}=23.8\cong 24$$

$$b^*=\frac{iCQ^*-\Pi D}{iC+\hat{\Pi}}=5.28\cong 5$$

$$T = \frac{Q^*}{D} = \frac{24}{200} = 0.12 \text{ έτη.}$$

Τώρα

$$m = \text{int}\left(\frac{\tau}{T}\right) = \text{int}\left(\frac{0.5}{0.12}\right) = \text{int}\frac{50}{12} = 4$$

και $r = \tau D - mQ^* - b^* = 0.5 \times 200 - 4 \times 24 - 5 = -1$,

που σημαίνει ότι παραγγέλλουμε 24 βαλβίδες όταν η έλλειψη βαλβίδων φθάσει την 1 βαλβίδα.

## 2.4 Διανυσματική βελτιστοποίηση με περιορισμούς (constrained optimization)

Συνήθως τα περισσότερα αποθέματα συνίστανται από πολλά είδη. Το κόστος είναι

$$K = f(Q_1,...,Q_n;r_1,...,r_n) = f(Q,r)$$

όπου $Q = [Q_1 \quad Q_2 \quad \cdots \quad Q_n]^T$, $r = [r_1 \quad r_2 \quad \cdots \quad r_n]^T$. Οι ποσότητες $Q$ και $r$ μπορεί να είναι περιορισμένες. Παράδειγμα, έστω ότι κάθε μονάδα κάθε είδους καταλαμβάνει χώρο $s_i$˙ τότε όλα τα είδη καταλαμβάνουν $F = \sum_i Q_i s_i$ και το $F$ είναι δεδομένο.

Τώρα θεωρούμε έναν Ευκλείδειο χώρο $R^n$ τέτοιον ώστε $Q$, $r \in R^n$ και ορίζουμε το διάνυσμα $x = \begin{bmatrix} Q \\ -- \\ r \end{bmatrix}$. Προφανώς $x \in R^{2n}$.

**Ορισμός 1**

Ένα σημείο $x^* \in R^{2n}$ λέγεται τοπικό ελάχιστο της $f$ αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|x - x^*\| < \varepsilon \Rightarrow f(x^*) \leq f(x).$$

**Ορισμός 2**

Το $x^* \in R^{2n}$ λέγεται απόλυτο (ή ολικό) ελάχιστο της $f$ αν $f(x^*) \leq f(x)$ $\forall$ $x^* \in R^{2n}$.

**Θεώρημα 1**

Αν ένα σημείο $x^* \in D \subset R^{2n}$ είναι ελάχιστο της $f$ τότε

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial Q_1} = \frac{\partial f\left(x^*\right)}{\partial Q_2} = \ldots = \frac{\partial f\left(x^*\right)}{\partial Q_n} = \frac{\partial f\left(x^*\right)}{\partial r_1} = \ldots = \frac{\partial f\left(x^*\right)}{\partial r_n} = 0\,,$$

όπου $D$ είναι το πεδίο ορισμού της $f$.

**Θεώρημα 2**

Αν η βαθμίδα $\left(\text{grad}f = \nabla f\right)$ μιας συνάρτησης είναι 0 τότε το σημείο αυτό είναι τοπικό ελάχιστο ή μέγιστο αν ο πίνακας

$$q = \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial Q_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial Q_1 \partial Q_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial Q_1 \partial r_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial r_n \partial Q_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial r_n \partial Q_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial r_n^2} \end{bmatrix}\right|_{x^* = \left(Q^*, R^*\right)} > 0 \text{ ή } < 0.$$

Τώρα εξετάζουμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης (μεγιστοποίησης) μιας συνάρτησης $f$ με τους περιορισμούς

$$g_1(x) = g_2(x) = \ldots = g_m(x) = 0\,. \qquad \text{(a)}$$

**Ορισμός 3**

Ένα σημείο $x^* \in D$ λέγεται τοπικό ελάχιστο της $f$ υποκείμενης στους περιορισμούς (a) αν $g_1(x^*) = \ldots = g_m(x^*) = 0$ και αν $\exists\ \varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\|x - x^*\| < \varepsilon$ για $x \in D$ μαζί με την $g_1(x^*) = \ldots = g_m(x^*)$ συνεπάγεται $f(x^*) \leq f(x)$.

**Θεώρημα 3**

Αν το $x^* \in D$ είναι ένα σημείο στο οποίο η $f$ έχει τοπικό ελάχιστο υποκείμενη στους περιορισμούς (a) και οι $f$ και $g$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους, τότε υπάρχουν αριθμοί $\lambda_1^*$, $\lambda_2^*$, ..., $\lambda_m^*$ που λέγονται πολλαπλασιαστές Lagrange, τέτοιοι ώστε οι $x^*$, $\lambda_1^*$, ..., $\lambda_m^*$ είναι η λύση του ακόλουθου συστήματος $2n + m$ εξισώσεων:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_i} = 0\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, 2n,$$

$$g_j\,(Q_1, \ldots Q_n\,; r_1, \ldots, r_n) = 0, \qquad j = 1, \ldots, m.$$

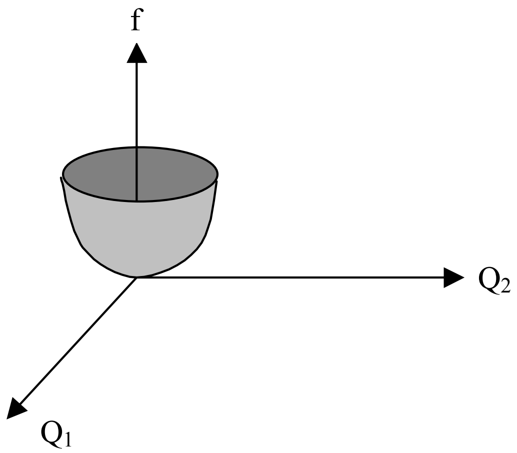
Το θεώρημα αυτό μας λέει ότι αντί για την $f$ ελαχιστοποιούμε την

$$L = f(x) + \lambda_1\, g_1(x) + \lambda_2\, g_2(x) + \ldots + \lambda_m\, g_m(x).$$

**Παράδειγμα 2.2**

Ελαχιστοποιείστε την $f = Q_1^2 + Q_2^2$ με τον περιορισμό $Q_1 + Q_2 = 5$.

Η $f$ είναι κυρτή συνάρτηση $U$ των $Q_1$, $Q_2$




Στο ακρότατο, το διαφορικό της $f$ γίνεται 0, ή

$$df = \frac{\partial f}{\partial Q_1} dQ_1 + \frac{\partial f}{\partial Q_2} dQ_2 = 0$$

Αν οι $Q_1$ και $Q_2$ ήταν ανεξάρτητες τότε τα $dQ_1$ και $dQ_2$ θα μπορούσαν να επιλεγούν αυθαίρετα ώστε $\frac{\partial f}{\partial Q_1} = \frac{\partial f}{\partial Q_2} = 0$.

Εν τούτοις έχουμε τον περιορισμό όπου $Q_1 = 5 - Q_2$ και $f = Q_2^2 + (5 - Q_2)^2$.

$$df = [2Q_2 - 2(5 - Q_2)]\, dQ_2 = 0 \Rightarrow Q_1^* = Q_2^* = 2.5.$$

Τώρα θεωρούμε τη μέθοδο Lagrange. Η **επαυξημένη**, όπως λέγεται, συνάρτηση είναι

$$f_a = Q_1^2 + Q_2^2 + \lambda(Q_1 + Q_2 - 5).$$

Στο ελάχιστο προφανώς $Q_1^* + Q_2^* - 5 = 0$ και άρα προσθέσαμε 0 στην $f$. Τώρα

$$df_a(Q_1^*, Q_2^*, \lambda) = (2Q_1^* + \lambda)dQ_1 + (2Q_2^* + \lambda)dQ_2 + (Q_1^* + Q_2^* - 5)d\lambda.$$

Στο ελάχιστο ο συντελεστής του $d\lambda$ είναι 0. Επιλέγουμε στη συνέχεια το $\lambda$ έτσι ώστε ο συντελεστής του $dQ_1$ να είναι 0. Αλλά τότε ο συντελεστής του $dQ_2$ θα είναι 0. Άρα

$$\left.\begin{aligned} 2Q_1^* + \lambda = 0 \\ 2Q_2^* + \lambda = 0 \\ Q_1^* + Q_2^* - 5 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow Q_1^* = Q_2^* = 2.5\,,\, \lambda = -5.$$

**Παράδειγμα 2.3**

Μια εταιρεία αγοράζει 3 ειδών εξαρτήματα. Η διοίκηση αποφασίζει η επένδυση σ' αυτά τα είδη να μην υπερβαίνει τα \$15,000. Δεν επιτρέπονται παραγγελίες που θα ικανοποιηθούν στο μέλλον και το ποσοστό *i* είναι 20%. Εύρετε τη βέλτιστη στρατηγική για κάθε είδος και για τα ακόλουθα δεδομένα:

| | Είδος | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 |
| $D_i$ | 1,000 | 1,000 | 2,000 |
| $C_i$ | 50 | 20 | 80 |
| $A_i$ | 50 | 50 | 50 |

Προφανώς $b = 0$. Υποθέτουμε $P \to \infty$ και χρησιμοποιούμε το μοντέλο IV.

$$K_n = \frac{A_n D_n}{Q_n} + C_n D_n + i_n C_n \frac{Q_n}{2}\,.$$

Ελαχιστοποιούμε την $K = \sum_{n=1}^{3} K_n$ με τον περιορισμό $\sum_{j=1}^{3} C_j Q_j = 15{,}000$. Η επαυξημένη συνάρτηση είναι

$$K_a = \sum_{n=1}^{3}\left[\frac{A_n D_n}{Q_n} + C_n D_n + i_n C_n \frac{Q_n}{2}\right] + \lambda\left(\sum_{j=1}^{3} C_j Q_j - 15{,}000\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial K_a}{\partial Q_j} = -\frac{A_j D_j}{Q_j^2} + \frac{iC_j}{2} + \lambda C_j = 0, \;\; j = 1,2,3 \\ \sum_{j=1}^{3} C_j Q_j^* - 15{,}000 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \; Q_1^* = 88\,,\; Q_2^* = 139\,,\; Q_3^* = 98\,,\; \lambda^* = 0.03\,.$$

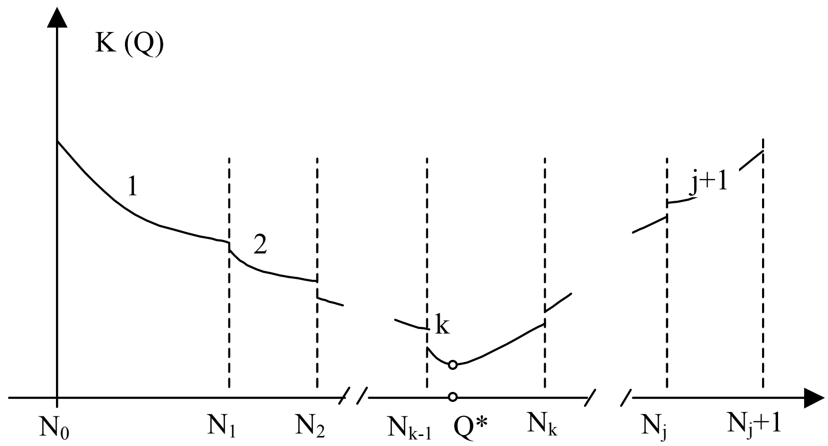
## 2.5 Εκπτώσεις ποσοτήτων (Quantity discounts)

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου το κόστος *C* εξαρτάται από την ποσότητα αγοράς και όσο μεγαλύτερη είναι η ποσότητα τόσο μικρότερη είναι η τιμή. Αυτή είναι η περίπτωση εκπτώσεων ποσοτήτων.

Υποθέτουμε ότι ισχύει το μοντέλο IV και

$$C = C_j \qquad \text{αν } N_{j\text{-}1} \leq Q < N_j \,.$$

Ευρίσκουμε τότε την καμπύλη κόστους για τις διάφορες περιπτώσεις και υπολογίζουμε το βέλτιστο σημείο.




Ουσιαστικά ευρίσκουμε το $\min_j \left( \min_Q K_j(Q) \right)$. Στην εικόνα, αυτό το σημείο είναι το $Q^*$.

**Παράδειγμα 2.4**

Κάποια βιομηχανία χρησιμοποιεί μεγάλες ποσότητες κάποιου υλικού στις γραμμές παραγωγής της. Η απαίτησή της είναι να χρησιμοποιεί παραγγελίες σταθερού μεγέθους και καθόλου ανικανοποίητη ζήτηση. Ετησίως χρειάζονται 300,000 μονάδες του υλικού, το σταθερό κόστος παραγγελίας είναι \$ 80, το ετήσιο κόστος τόκων, ασφάλειας, και φόρων στο μέσο απόθεμα είναι 20% της αξίας τους μέσου αποθέματος, το κόστος αποθήκευσης είναι \$ 0.1/μήνα υπολογισμένο στη μέση ποσότητα που είναι αποθηκευμένη, η τιμή αγοράς βασίζεται σε μια τιμή \$ 20 ανά παραγγελία και τον πίνακα:

| Μέγεθος παραγγελίας | Κόστος/μονάδα (\$) |
|---|---|
| $0 < Q < 10{,}000$ | 1.00 |
| $10{,}000 \leq Q < 30{,}000$ | 0.98 |
| $30{,}000 \leq Q < 50{,}000$ | 0.96 |
| $50{,}000 \leq Q$ | 0.94 |

Να βρεθεί η βέλτιστη πολιτική.

Εδώ $A = 80 + 20 = 100$

$D = 300{,}000$ / χρόνο.

Κόστος εναποθήκευσης / χρόνο = $12 \times 0.1 = \$\ 1.2$

$i = 0.2$.

Για το μοντέλο IV έχουμε

$$K_j(Q) = \frac{AD}{Q} + C_j D + \left(iC_j + 1.2\right)\frac{Q}{2}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε $iC + 1.2$ αντί για το $iC$ μόνο αφού ο τελευταίος όρος του $K$ εκφράζει κόστος αποθέματος.

$$K_j(Q) = \frac{3\times 10^7}{Q} + 3\times 10^5 C_j + \left(0.2C_j + 1.2\right)\frac{Q}{2}$$

και

$$Q_j^* = \sqrt{\frac{2AD}{1.2 + iC_j}} = 10^3\sqrt{\frac{60}{1.2 + 0.2C_j}}\ .$$

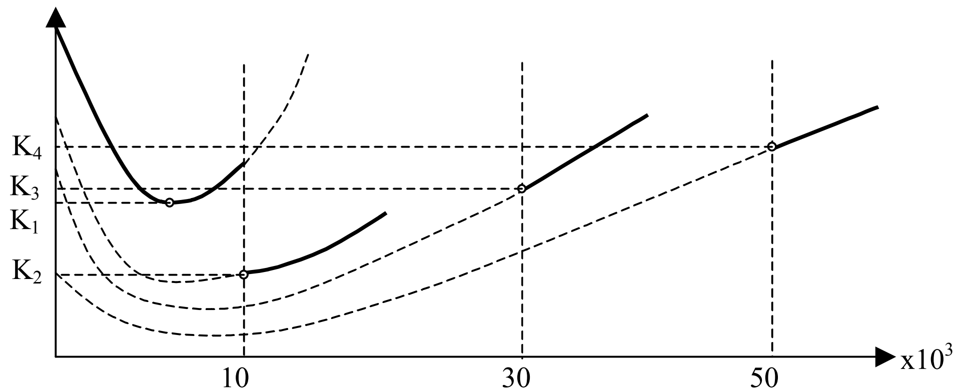
$j = 1 \ \Rightarrow Q_1^* = 6550$ και $K_1 = 309{,}155$

$j = 2 \ \Rightarrow Q_2^* = 6560 \ \Rightarrow Q_2^* = 10{,}000 \ \Rightarrow K_2 = 303{,}980$

$j = 3 \ \Rightarrow Q_3^* = 6570 \ \Rightarrow Q_3^* = 30{,}000 \Rightarrow K_3 = 309{,}880$

$j = 3 \ \Rightarrow Q_4^* = 6580 \ \Rightarrow Q_4^* = 50{,}000 \Rightarrow K_4 = 317{,}300$.

Επιλέγουμε $Q^* = 10{,}000$˙ η επιλογή έγινε δυνατή λόγω κυρτότητας U του κόστους.



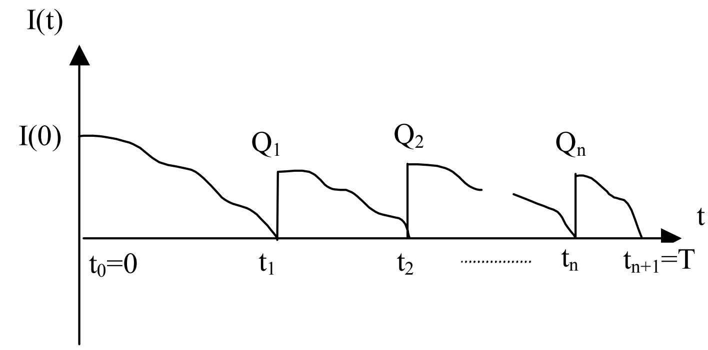
Οι παραγγελίες γίνονται κάθε $\frac{10,000}{300,000} = 0.033$ χρόνια.

## 2.6 Μεγέθη παραγγελίας με δυναμική ζήτηση

Έστω ότι ο ρυθμός ζήτησης στον χρόνο $t$ είναι $\Delta(t)$ και η χρονική περίοδος είναι $T$. Ονομάζουμε $n$ τον αριθμό παραγγελιών στην περίοδο $(0, T)$, και $Q_j$ το μέγεθος παραγγελίας που προστίθεται στο απόθεμα στο χρόνο $t = t_j$. Η συνολική ζήτηση στο διάστημα $[0, t]$ είναι

$$D(t) = \int_0^t \Delta(\tau)d\tau \,.$$

Υποθέτουμε ότι έχουμε την εξής περίπτωση




δηλαδή το απόθεμα σε κάθε στιγμή $t_i$ είναι 0. Τότε προσθέτουμε μια ποσότητα $Q_i$ που εξαντλείται από τη ζήτηση στο επόμενο διάστημα. Στη χρονική στιγμή $t_1$ όλη η ποσότητα $I(0)$ έχει εξαντληθεί λόγω της ζήτησης $D(t_1)$ ή

$I(0) = D(t_1) \Rightarrow t_1 = D^{-1}\,[I(0)]$ αν το $D$ έχει αντίστροφο˙ έτσι ευρίσκουμε το $t_1$.

Από το σχήμα φαίνεται ότι

$$I(t) = \begin{cases} I(0) - \int_0^t \Delta(\tau)d\tau & ;\ 0 \le \tau \le t \le t_1 \\ Q_j - \int_{t_j}^t \Delta(\tau)d\tau & ;\ t_j \le \tau \le t \le t_{j+1}\ ,\ j = 1,2,\ldots,n \end{cases}.$$

Προφανώς $Q_j = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \Delta(t)dt = D(t_{j+1}) - D(t_j)$

και $\int_{tj}^{t} \Delta(\tau)d\tau = D(t) - D(t_j)$

άρα

$$I(t) = \begin{cases} I(0) - D(t) & ;\ 0 \le t \le t_1 \\ D(t_{j+1}) - D(t) & ;\ t_j \le t \le t_{j+1} \end{cases}.$$

**Πρόβλημα**

Δοθέντος $n$ και $D$ ή $\Delta$ εύρετε τα $t_i$ και $Q_i$ ώστε να ελαχιστοποιηθεί το

$$K_n = nA + CD(\tau) + H_n$$

όπου $nA$ : συνολικό σταθερό κόστος προμήθειας

$CD(\tau)$: συνολικό μεταβλητό κόστος προμήθειας

$H_n$ : συνολικό κόστος αποθέματος.

Επομένως ελαχιστοποιούμε το $H_n$ ή

$$H_n = h\sum_{j=0}^{n}\int_{t_j}^{t_{j+1}} I(t)dt$$

$$= h\left[\int_0^{t_1}\left[I(0) - D(t)\right]dt + \sum_{j=1}^{n}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\left[D(t_{j+1}) - D(t)\right]dt\right]$$

$$= h\left[I(0)t_1 - \int_0^{t_1} D(t)\,dt + \sum_{j=1}^{n}\left[D(t_{j+1})(t_{j+1} - t_j) - \int_{t_j}^{t_{j+1}} D(t)\,dt\right]\right]$$

$$= h\left[\sum_{j=0}^{n}\left[D(t_{j+1})(t_{j+1} - t_j)\right] - \int_0^{T} D(t)\,dt\right]$$

όπου $I(0) = D(t_1)$. Η ποσότητα $\int_0^T D(t)dt$ δεν επηρεάζεται από την ελαχιστοποίηση. Η αναγκαία συνθήκη για ελάχιστο είναι

$$\frac{dH}{dt_j} = (t_j - t_{j-1})\frac{dD(t_j)}{dt_j} + D(t_j) - D(t_{j+1}) = 0$$

επειδή $\sum \; = \ldots + (t_j - t_{j-1})D(t_j) + (t_{j+1} - t_j)D(t_{j+1}) + \ldots$

ή $\quad \dfrac{dH}{dt_j} = (t_j - t_{j-1})\Delta(t_j) + D(t_j) - D(t_{j+1}) = 0$

ή $\quad D(t_{j+1}) = D(t_j) + (t_j - t_{j-1})\Delta(t_j)\,, \quad j = 2, ..., n$

οι ακραίες συνθήκες είναι

$D(t_1) = I(0)$

$D(t_{n+1}) = D(T)$.

Για να είναι το ακρότατο min πρέπει $\dfrac{d^2H}{dt_j^2} > 0$ .

Τότε

$$Q_j = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \Delta(t)dt = D(t_{j+1}) - D(t_j)\,.$$

**Παράδειγμα 2.5**

Τον επόμενο χρόνο ένα προϊόν είναι γνωστό ότι θα έχει ρυθμό ζήτησης $\Delta(t) = 1000 - 400t$, $0 \le t \le 1$ χρόνια. Το κόστος είναι 20/μονάδα και το σταθερό κόστος παραγγελίας 200 ανά παραγγελία. Το κόστος αποθέματος είναι 20% ετησίως και δεν επιτρέπονται ανικανοποίητες παραγγελίες. Το αρχικό απόθεμα είναι 192 μονάδες. Δεν απαιτείται τελικό απόθεμα. Πόσο και πότε πρέπει να παραγγελθεί τον επόμενο χρόνο;

<u>$n = 1$</u>

$D(t) = \int_0^t \Delta(\tau)d\tau = 1000\,t - 200\,t^2$. Η πρώτη παραγγελία γίνεται όταν το αρχικό απόθεμα εξαντλείται.

$D(t_1) = 192 \Rightarrow 1000\,t_1 - 200\,t_1^2 = 192 \Rightarrow t_1 = 0.2$

$Q_1 = D(T) - I(0) = D(1) - I(0)$ αφού για $n = 1$

$t_2 = t_{j+1} = T = 1$ έτος, άρα $Q_1 = 1000 - 200 - 192 = 608$ μονάδες.

Το κόστος αποθέματος είναι

$$H = h\sum_{j=0}^{n}(t_{j+1} - t_j)D(t_{j+1}) - h\int_0^T D(t)\,dt$$

αλλά $h = iC = 0.2 \times 20 = 4$ άρα

$$H = 4(t_1 - t_0)\,D(t_1) + 4(t_2 - t_1)\,D(t_2) - 4\int_0^1 \left(1000\,t - 200\,t^2\right)dt$$

$$= 4 \times 0.2 \times 192 + 4 \times 0.8 \times 800 - 4\int_0^1 \left(1000\,t - 200\,t^2\right)dt$$

$$= 980.$$

Το κόστος είναι $K_1 = nA + H_n + CD\,(T) = 1\times 200 + 980 + CD\,(T) = 1180 + CD\,(T)$.

<u>$n = 2$</u>

$t_1 = 0.2$ όπως ήδη βρήκαμε. Τώρα

$$\left.\begin{array}{l} D(t_3) = D(t_2) + (t_2 - t_1)\Delta(t_2) \\ \text{αλλά} \;\; D(t_3) = D(T) = 800 \end{array}\right\} \Rightarrow t_2 = 0.626\,.$$

Η ποσότητα παραγγελίας είναι

$Q_1 = D(0.626) - D(0.2) = 548 - 192 = 356$

$Q_2 = D(1) - D(0.626) = 800 - 548 = 252$

$K_2 = 2A + H_2 + CD(T) = 951 + CD(T)$.

<u>$n = 3$</u>

$t_1 = 0.2$

$$\left.\begin{array}{l} D(t_3) = D(t_2) + (t_2 - t_1)\Delta(t_2) \\ D(t_4) = D(T) = 800 = D(t_3) + (t_3 - t_2)\Delta(t_3) \end{array}\right\} \Rightarrow t_2 = 0.383, \;\; t_3 = 0.577$$

και $\quad Q_1 = D(t_2) - D(t_1) = D(0.383) - D(0.2) = 354 - 192 = 162$

$Q_2 = D(0.577) - D(0.383) = 511 - 354 = 157$

$Q_3 = D(1) - D(0.577) = 800 - 511 = 289.$

Παρόμοια $K_3 = 1028$.

Άρα επιλέγουμε $n = 2$ σαν καλύτερη στρατηγική.

Παρατηρούμε ότι $t\ddot{D} + 2\dot{D} > 0 \Rightarrow t < 1.6$ χρόνια που ισχύει πάντα.

## 2.7 Σχεδίαση παραγωγής

Τώρα εξετάζουμε τη διαδικασία της παραγωγής.

Ορίζουμε:

$x_i$ : ποσότητα προϊόντος $i$ , $i = 1, 2, ..., n$

$b_k$ : ποσότητα πρώτης ύλης προϊόντος $k$ , $k = 1, 2, ..., K$

$a_{ik}$ : ποσότητα πρώτης ύλης προϊόντος που απαιτείται για την παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος $i$

$U_i$ : μέγιστη δυνατή ζήτηση προϊόντος $i$

$L_i$ : ελάχιστη στάθμη παραγωγής προϊόντος $i$

$r_i$ : εισόδημα από την πώληση μιας μονάδας προϊόντος $i$

$c_i$ : μεταβλητό κόστος ανά μονάδα παραγόμενου προϊόντος $i$.

Καθαρό εισόδημα: $Z = \sum_{i=1}^{n} (r_i - c_i) x_i$ .

Ο σκοπός μας είναι να μεγιστοποιήσουμε το $Z$ υποκείμενο στους περιορισμούς:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_i \le b_k \qquad ; k = 1,2,..., K$$

$$L_i \le x_i \le U_i \ ; i = 1,2,..., n.$$

Αυτό είναι πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού και λύνεται με τον αλγόριθμο simplex.

**Παράδειγμα 2.6**

Μια βιομηχανία παράγει 4 προϊόντα με τις ακόλουθεςαπαιτήσεις:

| | Χρόνοι παραγωγής (ώρες / μονάδα) | | | | Ώρες παραγωγής διαθέσιμες |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| Έλαση | 0.03 | 0.15 | 0.05 | 0.10 | 400 |
| Διάτρηση | 0.06 | 0.12 | _ | 0.10 | 400 |
| Συναρμολόγηση | 0.05 | 0.10 | 0.05 | 0.12 | 500 |
| Βάψιμο | 0.04 | 0.20 | 0.03 | 0.12 | 450 |
| Συσκευασία | 0.02 | 0.06 | 0.02 | 0.05 | 400 |

| Προϊόν | Τιμή πώλησης / μονάδα | Μεταβλητό κόστος / μονάδα | $L$ | $U$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 6 | 1000 | 6000 |
| 2 | 25 | 15 | _ | 500 |
| 3 | 16 | 11 | 500 | 3000 |
| 4 | 20 | 14 | 100 | 1000 |

Προφανώς $Z = 4x_1 + 10x_2 + 5x_3 + 6x_4$

**i**. Περιορισμοί στο χρόνο παραγωγής:

Έλαση $0.03x_1 + 0.15x_2 + 0.05x_3 + 0.1\,x_4 \leq 400$

Διάτρηση $0.06x_1 + 0.12x_2 + 0.1\,x_4 \leq 400$

Συναρμολόγηση $0.05x_1 + 0.1x_2 + 0.05x_3 + 0.12x_4 \leq 500$

Βάψιμο $0.04x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 + 0.12x_4 \leq 450$

Συσκευασία $0.02x_1 + 0.06x_2 + 0.02x_3 + 0.05x_4 \leq 400$

**ii**. Είναι γνωστό ότι απαιτούνται 2 $m^2$ ανά μονάδα κάποιου είδους λαμαρίνας για το προϊόν 2, και 1.2 $m^2$ ανά μονάδα για το προϊόν 4. Συνολικά υπάρχουν 2,000 $m^2$ λαμαρίνας, άρα

$2x_2 + 1.2x_4 \leq 2000$

**iii**. Περιορισμοί πωλήσεων

$1000 \le x_1 \le 6000$

$0 \le x_2 \le 500$

$500 \le x_3 \le 3000$

$100 \le x_4 \le 1000$

Με τον αλγόριθμο simplex βρίσκουμε $x_1^* = 5500$, $x_2^* = 500$, $x_3^* = 3000$, $x_4^* = 100$.

## 2.8 Στοχαστική ζήτηση

Στα προβλήματα σχεδίασης της παραγωγής υποθέσαμε ότι υπήρχε κάποιο άνω όριο $U_i$ στη ζήτηση του προϊόντος *i* και

$$X_i \le U_i$$

Η ζήτηση όμως είναι στοχαστική διαδικασία και είναι ορθότερο να διατυπώσουμε το πρόβλημα με πιθανότητες:

$$P[D_i \le X_i] \le \mathrm{a}_i\,, \text{ ή } P[X_i < D_i] = 1 - \mathrm{a}_i$$

τώρα δηλαδή αντί για το $U_i$ δίνουμε την πιθανότητα $1–\mathrm{a}_i$ το $X_i$ να είναι μικρότερο της ζήτησης $D_i$.

Έστω $f_i(\delta_i)$ η πυκνότητα της ζήτησης προϊόντος *i*. Τότε

$$P[D_i \le X_i] \le \mathrm{a}_i \Rightarrow \int_0^{X_i} f_i(\delta_i)d\delta_i = F(X_i) \le \mathrm{a}_i\,.$$

**Παράδειγμα 2.7**

Έστω a = 0.1 και η ζήτηση ενός προϊόντος είναι κανονική με μέση τιμή $\mu$ = 1000 και τυπική απόκλιση $\sigma$ = 100. Τότε η τυχαία μεταβλητή $\dfrac{D-\mu}{\sigma}$ είναι κανονική με μέση τιμή 0 και διασπορά 1.

Επίσης

$$P(D \le X) = P\left(\frac{D-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma}\right) = 0.1$$

και άρα

$$\int_{-\infty}^{\frac{X-\mu}{\sigma}} f(\delta)d\delta \leq 0.1\,.$$

Από πίνακες $\frac{X-\mu}{\sigma} \leq -1.28 \Rightarrow X \leq 872$

και μ' αυτόν τον τρόπο προσδιορίζουμε το πάνω όριο.

**Παράδειγμα 2.8**

Ένα ακόμη πιο δύσκολο παράδειγμα θα δείξει πως χρησιμοποιούμε τις κατανομές της ζήτησης. Μια επιχείρηση διαθέτει έναν προϋπολογισμό Β για την προμήθεια *n* ειδών. Ορίζουμε

$X_i$ : το μέγεθος της προμήθειας προϊόντος *i*

$C_i$ : μοναδιαίο κόστος αγοράς

$r_i$ : μοναδιαία τιμή πώλησης κατά τη διάρκεια της εποχής πώλησης

$r_i^{'}$ : μοναδιαία τιμή πώλησης εκτός εποχής

$D_i$ : ζήτηση του *i* κατά την διάρκεια της εποχής πώλησης

Η ποσότητα του είδους *i* που πωλείται είναι

$$\Phi = \min\left(X_i, D_i\right)$$

και απομένει

$$\xi = \max\left(X_i - D_i, 0\right)$$

Η συνάρτηση κέρδους είναι:

$$Z = \sum_{i=1}^{n}\left(r_i\Phi + r_i^{'}\xi - C_iX_i\right)$$

που έχει μέση τιμή

$$E(Z) = \sum_{i=1}^{n}\left[r_iE(\Phi) + r_i^{'}E(\xi) - C_iX_i\right].$$

Το πρόβλημα είναι η μεγιστοποίηση του $E(Z)$ υποκείμενου στον περιορισμό

$$\sum_{i=1}^{n} C_iX_i = \mathrm{B}\,.$$

Χρησιμοποιώντας πολλαπλασιαστές Lagrange μεγιστοποιούμε την

$$J_{\mathrm{a}} = E(Z) + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} C_i X_i - \mathrm{B}\right).$$

Τώρα

$$E(\Phi) = \int_0^{X_i} \delta_i f_i(\delta_i) d\delta_i + \int_{X_i}^{\infty} X_i f_i(\delta_i) d\delta_i$$

$$= \int_0^{X_i} \delta_i f_i(\delta_i) d\delta_i + X_i\left[1 - F_i\left(X_i\right)\right]$$

και

$$E(\xi) = \int_0^{X_i} \left(X_i - \delta_i\right) f_i(\delta_i) d\delta_i \, .$$

Άρα

$$J_{\mathrm{a}} = \sum_{i=1}^{n}\left[ r_i \int_0^{X_i} \delta_i f_i(\delta_i) d\delta_i + r_i X_i\left(1 - F_i\left(X_i\right)\right) + r_i^{'} X_i \int_0^{X_i} f_i(\delta_i) d\delta_i - r_i^{'} \int_0^{X_i} \delta_i f(\delta_i) d\delta_i - C_i X_i \right]$$

$$+ \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} C_i X_i - \mathrm{B}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[ \left(r_i - C_i\right) X_i + \left(r_i - r_i^{'}\right)\left( \int_0^{X_i} \delta_i f_i\left(\delta_i\right) d\delta_i - X_i F_i\left(X_i\right)\right)\right] + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} C_i X_i - \mathrm{B}\right).$$

Παίρνουμε παραγώγους

$\dfrac{\partial J_{\mathrm{a}}}{\partial X_i} = 0 \Rightarrow r_i - C_i - \left(r_i - r_i^{'}\right) F_i\left(X_i\right) - \lambda C_i = 0$, για $i$ =1, 2, …, $n$.

Έχουμε λοιπόν $n$ εξισώσεις και την

$\sum_{i=1}^{n} C_i X_i = \mathrm{B}$ που αντιστοιχεί στην $\dfrac{\partial J_{\mathrm{a}}}{\partial \lambda} = 0$.

Τελικά έχουμε

$$F_i\left(X_i^{*}\right) = \frac{r_i - \left(1 + \lambda^{*}\right) C_i}{r_i - r_i^{'}} \, ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i X_i^* = B\ .$$

Το σύστημα αυτών των εξισώσεων μπορεί να λυθεί αριθμητικά ή με δοκιμή και σφάλμα. Μπορούμε να δοκιμάζουμε διάφορα $\lambda$ στην πρώτη εξίσωση μέχρις ότου ικανοποιήσουμε τη δεύτερη. Προφανώς χωρίς περιορισμούς τα $X_i^*$ προκύπτουν από τις εξισώσεις

$$F_i\left(X_i^*\right) = \frac{r_i - C_i}{r_i - r_i^{'}}$$

που λύνονται εύκολα.

## 2.9 Επιλογή διαδικασίας παραγωγής (Production planning)

Σ' αυτήν την περίπτωση ο αριθμός προϊόντων και μονάδων κάθε είδους είναι γνωστός. Οι πόροι παραγωγής (μηχανήματα κ.λπ.) είναι περιορισμένοι. Κάθε προϊόν μπορεί να παραχθεί κατά πολλούς τρόπους (στο εργοστάσιο, από υπεργολάβο, και από τους δυο κ.λπ.). Το πρόβλημα εδώ είναι ν' αποφασίσουμε πόσο θα παράγουμε με κάθε διαδικασία ώστε να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος παραγωγής.

Συμβολισμός:

$x_{ij}$ : ποσότητα προϊόντος $i$ που παράγεται με την διαδικασία $j$ ; $i = 1,2,...,n$, $j = 1,2,...,m$

$D_i$ : απαιτούμενη παραγωγή προϊόντος $i$ στην περίοδο παραγωγής

$b_k$ : ποσότητα πόρου $k$, $k = 1,..., q$

$a_{ij}^k$ : μονάδες πόρου $k$ που χρησιμοποιούνται στην παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος $i$ με τη διαδικασία $j$

$C_{ij}$ : κόστος/μονάδα

$Z$ : συνολικό κόστος παραγωγής

**Πρόβλημα**

Εύρετε τα $x_{ij}$ ώστε να ελαχιστοποιηθεί το

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} C_{ij} x_{ij}$$

υποκείμενο στους περιορισμούς

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = D_i \, , \forall i$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{k} x_{ij} \le b_k \, , \forall k$$

$$x_{ij} \ge 0 \, , \forall i, j.$$

**Παράδειγμα 2.9**

Τέσσερα προϊόντα πρόκειται να παραχθούν σε 1 μήνα με τις εξής απαιτήσεις: $D_1$ = 3000, $D_2$ = 500, $D_3$ = 1000, $D_4$ = 2000. Οι ρυθμοί παραγωγής σε ώρες/μονάδα είναι όπως στο παράδειγμα 2.6. Η έλαση και η διάτρηση μπορούν να δοθούν σε υπεργολάβους με συνακόλουθη αύξηση του κόστους κατά 20%. Ο βιομήχανος μπορεί να δουλέψει το τμήμα βαφής σε υπερωρία 100 ωρών/μήνα. Αυτό επαυξάνει το κόστος των προϊόντων 1 και 3 κατά 0.2 ανά μονάδα, του προϊόντος 2 κατά 0.4 και του προϊόντος 4 κατά 0.3. Υπάρχει ένας περιορισμός 2000 $m^2$ λαμαρίνας για τα προϊόντα 2 και 4 για την εσωτερική έλαση και διάτρηση. Ο βιομήχανος έχει 4 επιλογές:

1. Εσωτερική έλαση, βάψιμο χωρίς υπερωρία
2. Εσωτερική έλαση, βάψιμο με υπερωρία
3. Υπεργολαβία, βάψιμο χωρίς υπερωρία
4. Υπεργολαβία, βάψιμο με υπερωρία

Πόσο και πώς πρέπει να παραχθεί;

Περιορισμοί ποσοτήτων:

$$\sum_{j=1}^{4} x_{1j} = 3000 \, , \sum_{j=1}^{4} x_{2j} = 500 \, , \sum_{j=1}^{4} x_{3j} = 1000 \, , \sum_{j=1}^{4} x_{4j} = 2000 \, .$$

Από τον πίνακα κόστους του παραδείγματος 2.6 έχουμε:

$x_{11} \to C_{11} = 6$

$x_{12} \to C_{12} = 6 + 0.2 = 6.2$

$x_{13} \to C_{13} = 6 + 20\,\% \times 6 = 7.2$

$x_{14} \to C_{14} = 7.2 + 0.2 = 7.4.$

Παρόμοια $C_{21} = 15$, $C_{22} = 15.4$ κ.λπ.

Το πρόβλημα είναι η ελαχιστοποίηση του

$$Z = 6x_{11} + 6.2x_{12} + 7.2x_{13} + 7.4x_{14} + 15x_{21} + 15.4x_{22} + 18x_{23} + 18.4x_{24} + 11x_{31} + 11.2x_{32} + 13.2x_{33} + 13.4\,x_{34} + 14x_{41} + 14.1x_{42} + 16.8x_{43} + 17.1x_{44}$$

υποκείμενου στους περιορισμούς:

**i**. Ωράριο εργοστασίου:

$$\sum_{j=1}^{2}\left(0.03x_{1j} + 0.15x_{2j} + 0.05x_{3j} + 0.1x_{4j}\right) \le 400$$

$$\sum_{j=1}^{2}\left(0.06x_{1j} + 0.12x_{2j} + 0.1x_{4j}\right) \le 400$$

$$\sum_{j=1}^{4}\left(0.05x_{1j} + 0.1x_{2j} + 0.05x_{3j} + 0.12x_{4j}\right) \le 500\,.$$

Οι επιλογές 1 και 3 δεν έχουν υπερωρία, άρα

$0.04(x_{11} + x_{13}) + 0.2(x_{21} + x_{23}) + 0.03(x_{31} + x_{33}) + 0.12(x_{41} + x_{43}) \le 450$

Τέλος $\sum_{j=1}^{4}\left(0.02x_{1j} + 0.06x_{2j} + 0.02x_{3j} + 0.05x_{4j}\right) \le 400\,.$

**ii**. Βάψιμο με υπερωρία:

$0.04(x_{12} + x_{14}) + 0.2(x_{22} + x_{24}) + 0.03(x_{32} + x_{34}) + 0.12(x_{42} + x_{44}) \le 100$ αφού μόνο οι επιλογές 2 και 4 έχουν υπερωρία.

**iii**. Επιφάνεια λαμαρίνας:

$2(x_{21} + x_{22}) + 1.2(x_{41} + x_{42}) \le 2000$

(Ισχύει για τα προϊόντα 2 και 4 και για τις επιλογές 1 και 2).

<u>Λύση με simplex</u>:

$x_{11}^{*} = 3000$, $x_{23}^{*} = 300$, $x_{24}^{*} = 200$, $x_{31}^{*} = 1000$, $x_{41}^{*} = 1667$, $x_{43}^{*} = 333$, $z^{*} = 67{,}013$

Οι υπόλοιπες ποσότητες είναι 0.

## 2.10 Προβλήματα ανάμιξης

Διάφορα προϊόντα αναμειγνύονται για την παραγωγή ενός είδους με ελάχιστο κόστος και ορισμένων προδιαγραφών (λιπάσματα, κράματα κ.λπ.)

Έστω:

$x_j$ : ποσότητα υλικού $j$ που χρησιμοποιείται ανά μονάδα προϊόντος

$C_j$ : κόστος ανά μονάδα του $j$

$a_{ij}$ : συμβολή μιας μονάδας του υλικού $j$ στην προδιαγραφή $i$ του προϊόντος

$b_i$ : προδιαγραφή $i$

$Z$ : κόστος / μονάδα υλικού

**Πρόβλημα**

Ελαχιστοποιείστε το

$$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j$$

υποκείμενου στους περιορισμούς

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \in \Delta(b_i)$ όπου $\Delta(b_i)$ είναι κάποια περιοχή που ορίζεται από τα $b_i$

$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$, που σημαίνει ότι όλα τα $x_j$ παράγουν μία μονάδα του προϊόντος.

Υποθέτουμε ότι τα ορυκτά έχουν σταθερούς συντελεστές καθαρότητας $d_j$. Όταν απομακρυνθούν τυχόν προσμίξεις (χώμα και άλλα άχρηστα υλικά στο ορυκτό) τότε κάθε προϊόν $j$ συμβάλλει κατά $d_j \times 100\%$ στην παραγωγή και άρα

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x_j = 1 .$$

**Παράδειγμα 2.10**

Μία βιομηχανία κραμάτων έχει μία παραγγελία κράματος που συνίσταται από 4 μέταλλα. Οι προδιαγραφές είναι: Μέταλλο A τουλάχιστον 23%, Μέταλλο B το πολύ 15%, Μέταλλο C το πολύ 4%, Μέταλλο D μεταξύ 35% και 65%.

Ακαθαρσίες θα απομακρυνθούν κατά την επεξεργασία. Έξι ορυκτά είναι διαθέσιμα με τα εξής δεδομένα:

| Ορυκτό | Μέταλλο A% | B% | C% | D% | Ακαθαρσίες % | Κόστος/τόνο |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 25 | 10 | 10 | 25 | 30 | 23 |
| 2 | 40 | 0 | 0 | 30 | 30 | 20 |
| 3 | 20 | 10 | 0 | 30 | 40 | 18 |
| 4 | 0 | 15 | 5 | 20 | 60 | 10 |
| 5 | 20 | 20 | 0 | 40 | 20 | 27 |
| 6 | 8 | 5 | 10 | 17 | 60 | 12 |

Ποιές είναι οι ποσότητες κάθε ορυκτού;

Εδώ

$\min Z = 23x_1 + 20x_2 + 18x_3 + 10x_4 + 27x_5 + 12x_6$

Περιορισμοί:

$0.25x_1 + 0.4x_2 + 0.2x_3 + 0.2x_5 + 0.8x_6 \geq 0.23$

$0.1x_1 + 0.1x_3 + 0.15x_4 + 0.2x_5 + 0.05x_6 \leq 0.15$

$0.1x_1 + 0.05x_4 + 0.1x_6 \leq 0.04$

$0.65 \geq 0.25x_1 + 0.3x_2 + 0.3x_3 + 0.2x_4 + 0.4x_5 + 0.17x_6 \geq 0.35$

Ισολογισμός υλικών:

$0.7x_1 + 0.7x_2 + 0.6x_3 + 0.4x_4 + 0.8x_5 + 0.4x_6 = 1$

Λύση με simplex:

$x_2^* = 0.9714$, $x_4^* = 0.8$.

Οι υπόλοιπες ποσότητες είναι 0. Άρα αγοράζουμε 0.9714 τόνους ορυκτού 2 και 0.8 τόνους ορυκτού 4 για την παραγωγή 1 τόνου του κράματος και $Z^* = 27.43$/τόνο.

## 2.11 Μοντέλα μεγέθους παραγωγής (Lot sizing)

Έχουμε ένα σύστημα παραγωγής που παράγει $n$ προϊόντα με $b = 0$. Το κόστος είναι

$$K = \sum_{i=1}^{n} k_i$$

και έχοντας εκφράσεις για τα $k_i$ θα μπορούσαμε να εύρουμε τις ποσότητες εκείνες που ελαχιστοποιούν το $K$. Συχνά όμως λόγω περιορισμένης δυναμικότητας του συστήματος δεν μπορούμε να πραγματοποιήσουμε το βέλτιστο σημείο επειδή τα διάφορα προϊόντα ανταγωνίζονται για τη χρήση των εγκαταστάσεων. Συχνά σε τέτοιες περιπτώσεις λειτουργούμε τις εγκαταστάσεις περιοδικά για όλα τα προϊόντα. Σε κάθε περίοδο $T$ προγραμματίζεται η παραγωγή όλων των προϊόντων και η διαδικασία επαναλαμβάνεται κάθε $T$.

Η ζήτηση του προϊόντος $j$ έχει ρυθμό $D_j$ και μπορεί να παραχθεί με ρυθμό $P_j$. Υποθέτουμε ότι $P_j > D_j$ και $\sum_{j=1}^{n} \frac{D_j}{P_j} \leq 1$. Το πηλίκο $\frac{D_j}{P_j}$ μας δίνει το ποσοστό του χρόνου που οι εγκαταστάσεις απασχολούνται για την παραγωγή του $j$. Αν π.χ. $D_j = P_j$ παράγουμε συνεχώς το $j$. Το άθροισμα μάς δίνει τη συνολική απασχόληση για όλα τα προϊόντα τής εταιρείας. Το ποσό προϊόντος $j$ που παράγεται στο χρόνο $T$ είναι

$$x_j = TD_j \,. \tag{2.9}$$

Και χρησιμοποιώντας το μοντέλο ΙΙ των αποθεμάτων

$$K(T) = \sum_{j=1}^{n} \left[ \frac{A_j D_j}{x_j} + C_j D_j + jC_j \frac{x_j}{2} \left( 1 - \frac{D_j}{P_j} \right) \right]. \tag{2.10}$$

$$(2.9), (2.10) \Rightarrow K(T) = \sum_{j=1}^{n} \left[ \frac{A_j}{T} + C_j D_j + iC_j \frac{TD_j}{2} \left( 1 - \frac{D_j}{P_j} \right) \right]$$

και

$$\frac{\partial K}{\partial T} = 0 \Rightarrow T^* = \sqrt{\frac{2\sum_{j=1}^{n} A_j}{i\sum_{j=1}^{n} C_j D_j \left( 1 - \frac{D_j}{P_j} \right)}} \,.$$

Έστω τώρα ότι κάθε προϊόν απαιτεί προετοιμασία των εγκαταστάσεων που παίρνει χρόνο $S_j$, τότε

$$\sum_{j=1}^{n} \left( S_j + T_j \right) \leq T \,.$$

Αλλά $x_j = T_j P_j = TD_j \Rightarrow T_j = \frac{D_j}{P_j}T$ οπότε

$$T \geq \frac{\sum_j S_j}{1-\sum_j \frac{D_j}{P_j}} \equiv T_{\min}$$

και άρα $T_{opt}$ = max [$T^*$, $T_{\min}$] επειδή δεν επιτρέπεται να πάμε κάτω από το $T_{\min}$.

**Παράδειγμα 2.11**

Τέσσερα προϊόντα παράγονται στις ίδιες εγκαταστάσεις. Ο ρυθμός κόστους αποθέματος είναι 20% ετησίως. $b = 0$.

Δίνεται:

| Προϊόν | Ετήσια ζήτηση | Ρυθμός παραγωγής μονάδες / έτος | Κόστος ετοιμασίας | Χρόνος ετοιμασίας (έτη) | Κόστος / μονάδα |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 3000 | 10000 | 50 | 0.001 | 10 |
| B | 2000 | 5000 | 70 | 0.002 | 15 |
| C | 5000 | 50000 | 120 | 0.005 | 5 |
| D | 1000 | 10000 | 80 | 0.003 | 20 |

Εύρετε τη βέλτιστη πολιτική.

Έχουμε

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{D_i}{P_i} = 0.9 < 1\,.$$

Αυτό σημαίνει ότι η εγκατάσταση εργάζεται το 90% του χρόνου και το 10% είναι διαθέσιμο για προετοιμασία και συντήρηση.

Τώρα $T_{\min} = \frac{\sum_{j=1}^{4} S_j}{1-0.9} = \frac{0.011}{0.1} = 0.11$ έτη

$\sum_{j=1}^{4} A_j = 320$ και $i = 0.2$. Από τον τύπο ευρίσκουμε $T^* = 0.2$ έτη.

Άρα $T_{opt} = T^* = 0.2 > T_{\min}$.

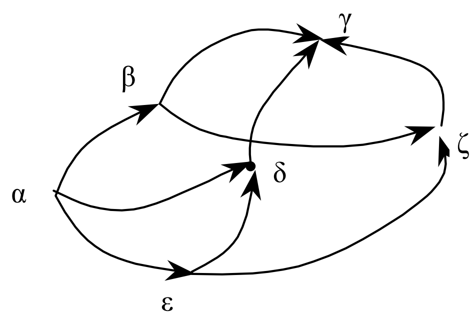
Τέλος από την $X_j = TD_j$ ευρίσκομε

$x_1^* = 600$, $x_2^* = 400$, $x_3^* = 1000$, $x_4^* = 200$ και $K(0.2) = 108190$.

## 2.12 Μία εφαρμογή δυναμικού προγραμματισμού σε συστήματα παραγωγής

Ο δυναμικός προγραμματισμός είναι μία μέθοδος βελτιστοποίησης που στηρίζεται στην **Αρχή του Βελτίστου** (Optimality Principle) του R. Bellman:

Αν η τροχιά *αβγ* είναι η βέλτιστη από το *α* στο *γ*, τότε η *βγ* είναι η βέλτιστη από το *β* στο *γ*.

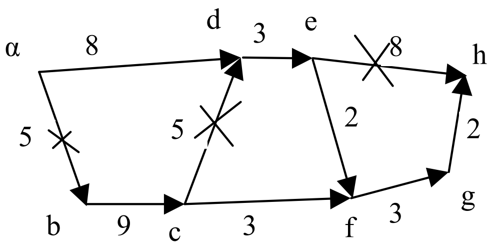



Έστω ότι το κόστος από το *α* στο *γ* είναι $K_{αγ}$. Αυτό είναι και το ελάχιστο από το *α* στο *γ*. Έστω τώρα ότι $K_{βζγ} < K_{βγ}$, δηλαδή υπάρχει άλλος δρόμος από το *β* στο *γ* με μικρότερο κόστος. Τότε $K_{αβγ} = K_{αβ} + K_{βγ} > K_{αβ} + K_{βζγ}$ που σημαίνει ότι το *αβγ* δεν είναι βέλτιστο και άρα η υπόθεση $K_{βγ} > K_{βζγ}$ είναι εσφαλμένη.

Χρησιμοποιώντας την αρχή του βελτίστου μπορούμε να κάνουμε τη βελτιστοποίηση αρχίζοντας από το τέλος αντί την αρχή του προβλήματος, αποφεύγοντας έτσι τη λεπτομερή καταμέτρηση πολλών εναλλακτικών διαδρομών.

**Παράδειγμα 2.12**

Να ευρεθεί ο συντομότερος δρόμος από το *α* στο *h*.




Αντί να καταμετρήσουμε όλα τα μονοπάτια από το *α* στο *h* ξεκινάμε από το τέλος πηγαίνοντας προς το *α* αποκλείοντας διαδρομές. Αρχίζουμε από τους γείτονες του *h* (δηλ. από τα *e*, *g*) διαγράφοντας διαδρομές που έχουν ασύμφορο μήκος. Για το *e* οι διαδρομές είναι: $K_{e\ h}$ = 8, $K_{e\ f\ g\ h}$ = 2+3+2 = 7 άρα το *eh* διαγράφεται. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία με τα γειτονικά σημεία των *e*, *g*. Πηγαίνουμε στο *c*: $K_{c\,d\,e\,f\,g\,h}$ = 5+3+2+3+2 = 15, $K_{c\,f\,g\,h}$ = 3+3+2 = 8 άρα διαγράφουμε το *cd*. Τελικά $K_{a\,d\,e\,f\,g\,h}$ = 8+3+2+3+2 = 18, $K_{a\,b\,c\,f\,g\,h}$ = 5+9+3+3+2 = 22. Άρα το βέλτιστο μονοπάτι είναι το *adefgh*.

Έστω τώρα ότι εν γένει έχουμε να ελαχιστοποιήσουμε κάποιο κόστος $K_{nN}(x_n)$ μετάβασης από την *n* στη βαθμίδα *N*, όπου το $x_n$ είναι κάποια παράμετρος που εκφράζει την κατάσταση στη βαθμίδα *n*. Οι βαθμίδες αντιστοιχούν σε διακεκριμένες στάθμες πάνω στις οποίες κάνουμε την αντίστροφη βελτιστοποίηση για *n* = 1, 2,..., *N*. Η αρχή του βελτίστου συνοψίζεται:

$$C^*_{nN}\left(x_n, x_{n+1}\right) = K_{n,n+1}\left(x_n \to x_{n+1}\right) + K^*_{n+1,N}\left(x_{n+1}\right)$$

$$K^*_{nN}\left(x_n\right) = \min_{x_{n+1}}\left[C^*_{nN}\left(x_n, x_{n+1}\right)\right].$$

όπου $C_{nN}(x_n,x_{n+1})$, είναι το ελάχιστο κόστος μετάβασης από την $x_n$ στην *N* μέσω της $x_{n+1}$, και $K^*_{nN}\left(x_n\right)$ είναι το κόστος αν η μετάβαση $x_n \to x_{n+1}$ είναι η καλύτερη προκειμένου να μεταβούμε από την $x_n$ στη βαθμίδα *N*.

**Παράδειγμα 2.13**

Σε μια επιχείρηση και για τον επόμενο χρόνο έχει βρεθεί ότι η απαίτηση σε ανθρώπινο δυναμικό είναι η ακόλουθη:

| Εποχή | Άνοιξη | Καλοκαίρι | Φθινόπωρο | Χειμώνας | Άνοιξη | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Άνθρωποι | 255 | 220 | 240 | 200 | 255 | ... |
| *n* | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | |

Υπάρχουν δυσκολίες με την απόλυση ή την πρόσληψη. Η πρώτη κοστίζει, η δεύτερη απαιτεί εκπαίδευση των ανθρώπων. Κάθε εργάτης πάρα πάνω κοστίζει 2000/άνθρωπο, εποχή. Το κόστος απόλυσης ή πρόσληψης είναι 200 επί το τετράγωνο της διαφοράς σταθμών απασχόλησης. Κλασματική απασχόληση επιτρέπεται. Πόσους πρέπει να απασχολήσουμε;

Η στάθμη απασχόλησης είναι $x_n$, *n* = 1,2,3,4 και $x_4 = x_4^* = 255$ αφού δεν έχει νόημα να υπερβούμε τη μέγιστη απασχόληση ούτε να την υποτιμήσουμε. Έστω ότι: *n* = 1: Καλοκαίρι, 2: Φθινόπωρο, 3: Χειμώνας, 4: Ανοιξη

Πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε την:

$K = 200(x_1 - x_0)^2 + 2000(x_1 - 220) + 200(x_2 - x_1)^2 + 2000(x_2 - 240) + 200(x_3 - x_2)^2 + 2000(x_3 - 200) + 200(x_4 - x_3)^2 + 2000(x_4 - 255)$

$$= \sum_{i=1}^{4} \left[ 200(x_i - x_{i-1})^2 + 2000(x_i - r_i) \right]$$

όπου $x_0 \equiv x_4 = 255$.

Από μια στάθμη $n$ και μετά έχουμε:

$$K_n = 200\,(x_n - x_{n-1})^2 + 2000\,(x_n - r_n) + \min \sum_{i=n+1}^{4} \left[ 200(x_i - x_{i-1})^2 + 2000(x_i - r_i) \right]$$

όπου:

$r_i \leq x_i \leq 255$ και $K_4 = 200(x_4 - x_3)^2$.

Τώρα $K_n^* = \min_{x_n} K_n$.

Η $K_n$ μπορεί να γραφεί

$K_n = 200\,(x_n - x_{n-1})^2 + 2000\,(x_n - r_n) + K_{n+1}^*$, επομένως

$K_n^* = \min_{r_n \leq x_n \leq 255} 200\,(x_n - x_{n-1})^2 + 2000\,(x_n - r_n) + K_{n+1}^*$.

Το πρόβλημα είναι να εύρομε τα $K_1^*$, $K_2^*$, $K_3^*$, και $K_4^*$ και τ' αντίστοιχα $x_1^*$, $x_2^*$, $x_3^*$, $x_4^*$.

Για <u>$n = 4$</u>,

$x_4^* = 255$, $K_4^* = 200\,(255 - x_3)^2$

<u>$n = 3$</u>

$K_3 = 200\,(x_3 - x_2)^2 + 2000\,(x_3 - 200) + 200(255 - x_3)^2$

$K_3^* = \min_{200 \leq x_3 \leq 255} K_3$

$$\frac{\partial K_3}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow 400(x_3 - x_2) + 2000 - 400(255 - x_3) \Rightarrow x_3^* = \frac{x_2 + 250}{2}$$

$\dfrac{\partial^2 K_3}{\partial x_3^2} > 0$ και $200 \leq x_3^* \leq 255 \Rightarrow 150 \leq x_2 \leq 260$ που ισχύει πάντα.

Μετά από λίγη άλγεβρα:

$K_3^* = 50\,(250 - x_2)^2 + 50\,(260 - x_2)^2 + 1000\,(x_2 - 150)$.

$\underline{n = 2}$

$K_2 = 200\,(x_2 - x_1)^2 + 2000\,(x_2 - 240) + K_3^*$

$= 200(x_2 - x_1)^2 + 2000(x_2 - 240) + 50(250 - x_2)^2 + 50(260 - x_2)^2 + 1000\,(x_2 - 150)$

$K_2^* = \min\limits_{240 \le x_2 \le 255} K_2$

$$\frac{\partial K_2}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow 200(3x_2 - 2x_1 - 240) = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{2x_1 + 240}{3}$$

$\dfrac{\partial^2 K_2}{\partial x_2^2} > 0$ και $240 \le x_2 \le 255 \Rightarrow 240 \le x_1 \le 262.5$ .

Αλλά εν γένει $220 \le x_1 \le 255$. Αν $x_1 < 240$, τότε

$\dfrac{\partial K_2}{\partial x_2} > 0$ για $240 \le x_2 \le 255$ άρα η $K_2$ είναι αύξουσα συνάρτηση του $x_2$ και για $x_2 = 240$ έχουμε minimum.

Επομένως, αν

$220 \le x_1 \le 240$ τότε $\Rightarrow x_2^* = 240 \Rightarrow K_2^* = 200(240 - x_1)^2 + 115000$

ενώ αν

$$240 \le x_1 \le 255 \Rightarrow x_2^* = \frac{2x_1 + 240}{3} \Rightarrow$$

$$K_2^* = \frac{200}{9}[2(250 - x_1)^2 + (265 - x_1)^2 + 30(3\,x_1 - 575)].$$

$\underline{n = 1}$

$K_1 = 200\,(x_1 - x_0)^2 + 2000\,(x_1 - 220) + K_2^*$

και

$$K_1 = \begin{cases} 200(x_1 - x_0)^2 + 2000(x_1 - 220) + 200(240 - x_1)^2 + 115000 & \text{για} \quad 220 \le x_1 \le 2 \\ \\ 200(x_1 - x_0)^2 + 2000(x_1 - 220) + \\ \frac{200}{9}\left[2(250 - x_1)^2 + (265 - x_1)^2 + 30(3x_1 - 575)\right] & \text{για} \quad 240 \le x_1 \le 255 \end{cases}$$

Παίρνουμε παραγώγους

$\frac{\partial K_1}{\partial x_1} = 400(2x_1 - x_0 - 235)$ για $x_1 \le 240$ και $x_0 = 255$,

οπότε $\frac{\partial K_1}{\partial x_1} = 800\,(x_1 - 254) < 0$ για $x_1 \le 240$,

άρα η $K_1$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του $x_1$ και άρα η min τιμή συμβαίνει για $x_1 = 240$.

Τώρα για $240 \le x_1 \le 255$

$$\frac{\partial K_1}{\partial x_1} = \frac{400}{3}(4x_1 - 3x_0 - 255)$$

και $\frac{\partial^2 K_1}{\partial x_1^2} > 0 \ \ \forall\, x_1$

$$\frac{\partial K_1}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{3x_0 + 255}{4} = 247.5$$

$K_1(240) = 200000$ και $K_1(247.5) = 185000$.

Επιλέγουμε επομένως $x_1^* = 247.5$, $x_2^* = 245$, $x_3^* = 247.5$, $x_4^* = 255$ και το συνολικό κόστος είναι $K^* = 185000$.

# III ΠΡΟΒΛΕΨΗ

**(Forecasting)**

Ποσότητες όπως η ζήτηση μπορούν να προσδιορισθούν από παλαιά δεδομένα χρησιμοποιώντας κάποια μέθοδο πρόβλεψης.

## 3.1 Μέθοδος παλινδρόμησης

**(Regression)**

Έστω ότι κάποια ποσότητα $x(t)$ είναι γραμμική και άρα θα θέλαμε την εκτίμησή της $\hat{x}(t) = \alpha t + \beta$ έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα.

$$\varepsilon^2 = \left(x(t) - \hat{x}(t)\right)^2 .$$

Υποθέτουμε ότι έχουμε στη διάθεσή μας μία σειρά μετρήσεων $x(t_1)$, $x(t_2)$,...,$x(t_n)$. Τότε ελαχιστοποιούμε

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon^2(t_i) = \sum_{i=1}^{n} \left[x(t_i) - \alpha t_i - \beta\right]^2 .$$

Αναγκαίες συνθήκες:

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial \sum \varepsilon^2}{\partial \alpha} = 0 \\ \dfrac{\partial \sum \varepsilon^2}{\partial \beta} = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} -2\sum_i t_i\left[x(t_i) - \alpha t_i - \beta\right] = 0 \\ -2\sum_i \left[x(t_i) - \alpha t_i - \beta\right] = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \sum_i t_i^2 + \beta \sum_i t_i = \sum_i t_i x(t_i) \\ \alpha \sum_i t_i + n\beta = \sum_i x(t_i) \end{cases} .$$

**Παράδειγμα 3.1**

Η ζήτηση ενός προϊόντος δίνεται από:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Ημέρα $t_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Ζήτηση $x(t_i)$ | 10 | 12 | 15 | 18 | 20 |

Αν η ζήτηση είναι γραμμική με τι ισούται;

Εδώ

$$\sum_{i=1}^{5} x(t_i) = 75, \quad \sum_{i=1}^{5} t_i x(t_i) = 251, \ \sum_{i=1}^{5} t_i = 15, \ \sum_{i=1}^{5} t_i^2 = 55$$

$$\left.\begin{array}{l} 55\alpha + 15\beta = 251 \\ 15\alpha + 5\beta = 75 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = 2.6,\ \beta = 7.2, \text{ και } \hat{x}(t) = 2.6 + 7.2 .$$

Εξετάζουμε τώρα το γενικότερο μοντέλο παλινδρόμησης

$$\hat{x}(t) = \sum_{j=1}^{m} a_j f_j(t), \tag{3.1}$$

όπου $t = t_1,....,t_n$. Θέτοντας $a \equiv \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ και $f \equiv \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}$, προκύπτουν

$$\hat{x}(t) = \alpha^T f(t) \text{ και } \varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t) = x(t) - \alpha^T f(t).$$

Έστω ότι ελαχιστοποιούμε $\sum_{i=1}^{n} q_i \varepsilon^2(t_i)$ όπου τα $q_i > 0$ είναι κάποια βάρη, ή ισοδύναμα ελαχιστοποιούμε το

$$e^T Q e$$

όπου $e \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon(t_1) \\ \varepsilon(t_2) \\ \vdots \\ \varepsilon(t_n) \end{bmatrix}$, $Q \equiv \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_n \end{bmatrix}$.

Ορίζουμε

$$A \equiv \begin{bmatrix} f_1(t_1) & f_1(t_2) & \cdots & f_1(t_n) \\ f_2(t_1) & f_2(t_2) & & f_2(t_n) \\ \vdots & & & \\ f_m(t_1) & f_m(t_2) & \cdots & f_m(t_n) \end{bmatrix},\ X \equiv \begin{bmatrix} x(t_1) \\ x(t_2) \\ \vdots \\ x(t_n) \end{bmatrix}.$$

Προφανώς $e = X - A^T a$ και

$$e^T Q e = (X - A^T a)^T Q (X - A^T a) = X^T Q X - X^T Q A^T a - a^T A Q X + a^T A Q A^T a .$$

Από τη γραμμική άλγεβρα είναι γνωστά τα ακόλουθα:

$(AB)^T = B^T A^T$, $\dfrac{\partial u^T A}{\partial u} = A$, $\dfrac{\partial A u}{\partial u} = A^T$ και

$\frac{\partial u^T Ru}{\partial u} = R^T u + Ru$, και αν ο $R$ είναι συμμετρικός $= 2Ru$.

Επομένως

$$\frac{\partial e^T Qe}{\partial \alpha} = -2AQX + 2AQA^T \alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha = \left(AQA^T\right)^{-1} AQX \tag{3.2}$$

και

$$\frac{\partial^2 e^T Qe}{\partial \alpha} = 2AQA^T > 0 \Rightarrow \alpha = \text{ολικό ελάχιστο.}$$

## 3.2 Κινούμενος μέσος όρος (Moving average)

Εδώ έχουμε μια σειρά $n$ δεδομένων $x_i$ και υποθέτουμε ότι $\hat{x} = \alpha$. Τότε

$$\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \hat{x}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \alpha\right)^2 ,$$

$$\frac{d\varepsilon^2}{da} = -2\sum_i (x_i - a) = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \, .$$

Έστω ότι το $n$ είναι σταθερό, τότε $a = \frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{k+n} x_i$

$$\cdot \quad \underbrace{\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot}_{\overset{n}{}} \quad \cdot$$

$$\qquad k+1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k+n$$

δηλαδή υπάρχει κάποιο παράθυρο εύρους $n$ που μετακινείται στα δεδομένα και δίνει το μέσο όρο.

**Παράδειγμα 3.2**

Αν $x_1 = 10$, $x_2 = 8$, $x_3 = 6$, $x_4 = 7$ τότε,

$$\hat{x}_5 = a = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i = 7.75 \, .$$

Αν $x_5 = 8$ τότε $\hat{x}_6 = a = 7.25$.

## 3.3 Εκθετική εξομάλυνση

## (Exponential Smoothing)

Πάλι υποθέτουμε ότι η διαδικασία είναι σταθερή αλλά αντί να ελαχιστοποιήσουμε το

$\sum_i (x_i - a)^2$, ελαχιστοποιούμε το

$$e = \sum_{i=1}^{n} \beta^{n-i} (x_i - a)^2 \text{ , όπου } 0 < \beta < 1.$$

Με άλλα λόγια επισυνάπτουμε βάρη στο κάθε σφάλμα κατά τη σειρά $\beta^{n-1}, \beta^{n-2}, ..., \beta, 1$ που σημαίνει ότι οι πλέον πρόσφατες μετρήσεις έχουν μεγάλο βάρος, ενώ οι παλαιές εξασθενούν.

$$\frac{de}{da} = 0 \Rightarrow -2\sum_{i=1}^{n} \beta^{n-i} (x_i - a) = 0 \Rightarrow a\sum_{i=1}^{n} \beta^{n-i} = \sum_{i=1}^{n} \beta^{n-i} x_i$$

και επειδή $\sum_{i=1}^{n} \beta^{n-i} = 1 + \beta + ... + \beta^{n-1} = \frac{1-\beta^n}{1-\beta}$

$$\alpha = \frac{1-\beta}{1-\beta^n} \sum_{i=1}^{n} \beta^{n-i} x_i = Y(n) \tag{3.3}$$

Τώρα εν γένει

$$\begin{aligned} Y(n) &= \frac{1-\beta}{1-\beta^n} \sum_{i=1}^{n-1} \beta^{n-i} x_i + \frac{1-\beta}{1-\beta^n} x_n \\ &= \frac{1-\beta^{n-1}}{1-\beta^n} \frac{1-\beta}{1-\beta^{n-1}} \beta \sum_{i=1}^{n-1} \beta^{n-1-i} x_i + \frac{1-\beta}{1-\beta^n} x_n \\ &= \frac{1-\beta^{n-1}}{1-\beta^n} \beta Y(n-1) + \frac{1-\beta}{1-\beta^n} x_n \end{aligned} \tag{3.4α}$$

Για $n \to \infty$, $\beta^n \to 0$ και άρα

$$Y(n) = \beta Y(n-1) + (1-\beta) x_n . \tag{3.4β}$$

Αρχική συνθήκη της εξίσωσης διαφοράς είναι $Y(0)$ να ευρίσκεται από πεπερασμένα δεδομένα. Το $\beta$ είναι συνήθως μεταξύ 0.7 και 0.99.

Συγκρίνοντας την (3.3) με τις εξισώσεις (3.4) προκύπτει ότι οι τελευταίες έχουν μικρότερο υπολογιστικό κόστος αφού η πρόβλεψη τη στιγμή $n$ προκύπτει από την μέτρηση $x_n$ και την τελευταία πρόβλεψη $Y(n\text{-}1)$ και αποφεύγεται ο υπολογισμός του αθροίσματος.

**Παράδειγμα 3.3**

Η ζήτηση ενός προϊόντος έχει την ακόλουθη ιστορία:

| Εβδομάδα | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ζήτηση | 15 | 18 | 10 | 12 | 20 | 17 | 22 | 16 | 14 | 20 |

Έστω ότι $\beta = 0.9$. Ποιά είναι η μελλοντική ζήτηση;

Εδώ $Y(n) = 0.9Y(n-1) + 0.1x_n$. Για αρχική εκτίμηση $Y(0)$ μαντεύουμε μια τιμή και έστω $Y(0) = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = 16.4 \equiv Y(10)$, που σημαίνει ότι $\hat{x}_{10+t} = 16$ για $t$ =1,2,... αφού οι τιμές της ζήτησης είναι ακέραιες. Η εξίσωση διαφοράς γίνεται:

$$Y(11) = 0.9Y(10) + 0.1x_{11}$$

**Αν δοθεί ότι** $x_{11} = 17$ τότε η νέα πρόβλεψη είναι: $\hat{x}_{11+t} = 0.9\cdot 16.4 + 0.1\cdot 17 = 16.46 \approx 16$, κ.λπ.

## 3.4 Προσαρμοστική εξομάλυνση (Adaptive smoothing)

Εδώ θα κάνουμε ανάλογη απλοποίηση στον υπολογισμό των παραμέτρων $\alpha$ του μοντέλου που δίδεται από την Εξ. (3.1).

Θεωρούμε το μοντέλο παλινδρόμησης

$$\hat{x}(t) = \sum_{j=1}^{m} a_j f_j(t),$$

όπου τώρα $t$ = 1,....,$n$. Τη στιγμή $n$ το διάνυσμα παραμέτρων που ελαχιστοποιούν το σταθμισμένο τετραγωνικό σφάλμα προσαρμογής $eQe^T$ δίδεται από την Εξ. (3.2) :

$$a(n) = \left[A(n)Q(n)A(n)^T\right]^{-1} A(n)Q(n)X(n)$$

όπου όλες οι ποσότητες εξαρτώνται από το πλήθος $n$ των διαθέσιμων παρατηρήσεων.

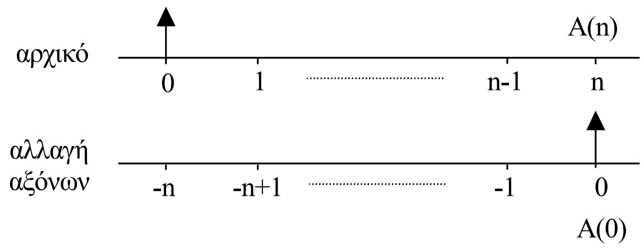
Ορίζοντας $B(n)\equiv A(n)Q(n)A^T(n)$ και $\gamma(n)\equiv A(n)Q(n)X(n)$, η (3.2) γράφεται

$$a(n)=B^{-1}(n)\,\gamma(n), \qquad \text{με } B(n)\neq 0. \tag{3.2'}$$

Αν είχαμε ($n$-1) παρατηρήσεις αντί για $n$ τότε θα ίσχυε ανάλογος τύπος υπολογισμού του διανύσματος $a(n$-1). Αν βάλουμε γεωμετρικά βάρη, $q_t = \beta^{n-t}$, στα σφάλματα όπως στην εκθετική εξομάλυνση, τότε οι ακόλουθες σχέσεις επαληθεύονται εύκολα από την Παράγραφο 3.1:

$$A(n)=\begin{bmatrix} f_1(1)\ldots f_1(n-1)\ f_1(n) \\ \vdots \quad \vdots\vdots\vdots \quad \vdots \quad\quad \vdots \\ f_m(1)\ldots f_m(n-1) f_m(n)\end{bmatrix},\ Q(n)=\begin{bmatrix}\beta^{n-1} & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \beta^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ \text{και } X(n)=\begin{bmatrix} x(1)\\ \vdots \\ x(n-1) \\ x(n)\end{bmatrix}$$

Για λόγους αναλυτικής ευκολίας μεταθέτουμε την αρχή των αξόνων στο σημείο $n$, άρα:




$$A(n)\rightarrow\begin{bmatrix} f_1(-n+1)\ldots f_1(-1)\ f_1(0) \\ \vdots \quad\quad \vdots\vdots\vdots \quad \vdots \quad\quad \vdots \\ f_m(-n+1)\ldots f_m(-1) f_m(0)\end{bmatrix}$$

Ορίζουμε τα διανύσματα

$$F(t)\equiv\begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_m(t)\end{bmatrix},\ t=\ldots,-2,-1,\,0,\,1,\,2,\,\ldots$$

Για πολλές επιλογές των συναρτήσεων $F$ συμβαίνει $F(t)$=$LF(t$-1), όπου $L$ είναι αντιστρέψιμος πίνακας ανεξάρτητος του $n$. Με άλλα λόγια οι μελλοντικές τιμές του $F$ είναι γραμμικές συναρτήσεις παλαιών. Αφού ο $L$ είναι αντιστρέψιμος, $F(t-1) = L^{-1} F(t)$.

**Παράδειγμα 3.4**

Αν $x(t) = a_1 + a_2 t + a_3 t^2$, τότε

$$F(t)=\begin{bmatrix}1\\ t\\ t^2\end{bmatrix},F(t+1)=\begin{bmatrix}1\\ t+1\\ t^2+2t+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L_{11} & L_{12} & L_{13}\\ L_{21} & L_{22} & L_{23}\\ L_{31} & L_{32} & L_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ t\\ t^2\end{bmatrix}1$$

$$\Rightarrow L=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&2&1\end{bmatrix},\ L^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&-2&1\end{bmatrix}.$$

Με βάση τα ανωτέρω, τώρα αναλύουμε τους όρους της (3.2'):

**α)** Οι πίνακες γράφονται ως εξής

$A(n) = [F(1\text{-}n) \ldots F(\text{-}1)\ F(0)] = [(L^{-1})^{n-1} \ldots .(L^{-1})^{1}\ (L^{-1})^{0}]\, F(0)$

$= [L^{-1}A(n\text{-}1)\ \ F(0)],$

λόγω του ότι για $t$=$n$-1 η αρχή των αξόνων ήταν στο $n$-1, οπότε $A(n\text{-}1) = [F(1\text{-}(n\text{-}1)) \ldots F(0)]$, και άρα $L^{-1}A(n\text{-}1) = [L^{-1}F(2\text{-}n) \ldots L^{-1}F(0)] = [F(1\text{-}n) \ldots F(\text{-}1)]$. Επίσης

$Q(n) = \begin{bmatrix} \beta^{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \beta^{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta Q(n-1) & \mathbf{O} \\ \mathbf{O}^{T} & 1 \end{bmatrix}$, όπου **O** το διάνυσμα στήλης με στοιχεία =0,

και τέλος $X(n) = \begin{bmatrix} x(1) \\ \vdots \\ x(n-1) \\ x(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(n-1) \\ x(n) \end{bmatrix}.$

**(β)** Για απλούστευση, στα $A(n\text{-}1)$, $Q(n\text{-}1)$, $X(n\text{-}1)$ παραλείπουμε το ($n$-1) και θέτουμε $F \equiv F(0)$. Ο όρος $B(n)$ που χρειαζόμαστε στην (3.2') γράφεται

$$B(n) \equiv A(n)Q(n)A^{T}(n) = \begin{bmatrix} L^{-1}A & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta Q & \mathbf{O} \\ \mathbf{O}^{T} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{T}(L^{-1})^{T} \\ F^{T} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \beta L^{-1}AQ & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{T}(L^{-1})^{T} \\ F^{T} \end{bmatrix} = \beta L^{-1}AQA^{T}(L^{-1})^{T} + FF^{T}$$

$$= \beta L^{-1}B(L^{-1})^{T} + FF^{T}.$$

Υποθέτουμε ότι έχουμε φθάσει στη **μόνιμη κατάσταση** και $B(n)$=$B(n\text{-}1)$=$B$. Επομένως

$$B = \beta L^{-1}B(L^{-1})^{T} + FF^{T}$$

η οποία είναι γνωστή ως εξίσωση Lyapunov του $B$ (γενική μορφή: $B$=$VBV^{T}$+$FF^{T}$). Πολλαπλασιάζοντας επί $L^{T}$ και τα δύο μέλη, παρατηρώντας ότι ο $L^{T}$ είναι αντίστροφος του $(L^{-1})^{T}$, και λύνοντας ως προς $L^{-1}B$ προκύπτει

$$L^{-1}B = \beta^{-1}[B - FF^{T}]\, L^{T} \qquad (3.6)$$

**(γ)** Ο όρος $\gamma(n)$ της (3.2') είναι

$$\gamma(n) \equiv A(n)Q(n)X(n) = \begin{bmatrix} \beta L^{-1}AQ & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ x(n) \end{bmatrix} = \beta L^{-1}AQX + F\, x(n).$$

Λόγω της $\alpha(n\text{-}1) = B^{-1}(n\text{-}1)\gamma(n\text{-}1) = B^{-1}AQX$, προκύπτει ότι $AQX{=}B\,\alpha(n\text{-}1)$ οπότε η ανωτέρω γράφεται

$$\gamma(n) = \beta L^{-1}B\,\alpha(n\text{-}1) \;+\; F\,x(n)\,.$$

Εισάγοντας την τελευταία στην (3.2') και θέτοντας $B(n){=}B$ προκύπτει

$$\alpha(n) = B^{-1}\,[\beta L^{-1}B\,\alpha(n\text{-}1) \;+\; F\,x(n)].$$

Με βάση την (3.6) αυτή η εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned}\alpha(n) &= \beta B^{-1}L^{-1}B\,\alpha(n\text{-}1) \;+\; B^{-1}F\,x(n)\\ &= \beta B^{-1}\beta^{-1}[B - FF^{T}]\,L^{T}\alpha(n\text{-}1) \;+\; B^{-1}F\,x(n)\\ &= B^{-1}[B - FF^{T}]\,L^{T}\alpha(n\text{-}1) \;+\; B^{-1}F\,x(n)\\ &= L^{T}\alpha(n\text{-}1) - B^{-1}FF^{T}L^{T}\alpha(n\text{-}1) \;+ B^{-1}F\,x(n)\\ &= L^{T}\alpha(n\text{-}1) + B^{-1}F\,[x(n) - F^{T}L^{T}\alpha(n\text{-}1)].\end{aligned}$$

Επειδή $F{\equiv}F(0)$ και το $L$ μετατοπίζει το χρόνο κατά 1 μονάδα, έχουμε

$$F^{T}L^{T}\alpha(n\text{-}1) = (LF)^{T}\alpha(n\text{-}1) = F^{T}(1)\,\alpha(n\text{-}1).$$

Αλλά $\hat{x}_{n-1}(n){=}F^{T}(1)\;\alpha(n\text{-}1)$ επειδή στη χρονική στιγμή $n-1$ κάνουμε πρόβλεψη για την επόμενη στιγμή $n$ και αφού το $n-1$ αντιστοιχεί στο 0, το $n$ αντιστοιχεί στο 1.

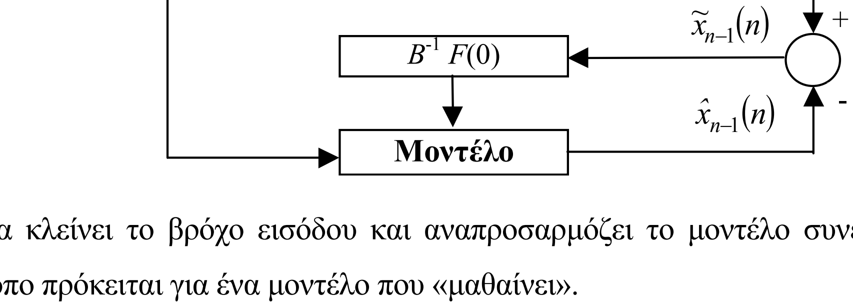
Τελικά $\alpha(n){=}L^{T}\alpha(n\text{-}1) + B^{-1}F(0)\,[x(n) - \hat{x}_{n-1}(n)]$. Ορίζουμε το **σφάλμα**

$$\tilde{x}_{n-1}(n) \equiv x(n) - \hat{x}_{n-1}(n),$$

οπότε

$$\alpha(n) = L^{T}\alpha(n\text{-}1) \;+\; B^{-1}F(0)\,\tilde{x}_{n-1}(n). \tag{3.7}$$

Αυτή είναι μια κλασική εξίσωση προσαρμοστικού ελέγχου όπως φαίνεται από το σχήμα:




Το σφάλμα κλείνει το βρόχο εισόδου και αναπροσαρμόζει το μοντέλο συνεχώς. Κατά κάποιο τρόπο πρόκειται για ένα μοντέλο που «μαθαίνει».

Μετά τον υπολογισμό του $a(n)$, οι **νέες** εκτιμήσεις $t$ χρονικών μονάδων στο μέλλον δίνονται από την

$$\hat{x}_n(n+t) = F^T(t)\, a(n),\ t = 1,2...$$

Κάνουμε δηλαδή πρόγνωση. Όταν οι μελλοντικές τιμές της $x$ αποκαλυφθούν, το σφάλμα πρόβλεψης $t$ βημάτων στο μέλλον από τη στιγμή $n$ θα είναι

$$\tilde{x}_n(n+t) = x(n+t) - \hat{x}_n(n+t).$$

**Παράδειγμα 3.5**

Έστω η διαδικασία:

$$x(t) = a_1 + a_2 t + a_3 \sin\frac{2\pi t}{12} + a_4 \cos\frac{2\pi t}{12} + a_5 \sin\frac{4\pi t}{12} + a_6 \cos\frac{4\pi t}{12}.$$

Υπολογίσετε την κλασική εξίσωση προσαρμοστικού ελέγχου.

$$F(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & sin\frac{2\pi t}{12} & cos\frac{2\pi t}{12} & sin\frac{4\pi t}{12} & cos\frac{4\pi t}{12} \end{bmatrix}^T.$$

Από την $F(t+1) = LF(t)$ ευρίσκομε:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ t+1 \\ sin\frac{2\pi(t+1)}{12} \\ cos\frac{2\pi(t+1)}{12} \\ sin\frac{4\pi(t+1)}{12} \\ cos\frac{4\pi(t+1)}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{16} \\ L_{21} & L_{22} & & L_{26} \\ \vdots & & & \vdots \\ & & & \\ & & & \\ L_{61} & L_{62} & \cdots & L_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ sin\frac{2\pi t}{12} \\ cos\frac{2\pi t}{12} \\ sin\frac{4\pi t}{12} \\ cos\frac{4\pi t}{12} \end{bmatrix}$$

όπου,

$$\sin\frac{2\pi(t+1)}{12} = \sin\frac{2\pi t}{12}\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{2\pi t}{12}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{2\pi t}{12} + \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi t}{12}.$$

Παρόμοια $cos\frac{2\pi(t+1)}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}cos\frac{2\pi t}{12} - \frac{1}{2}sin\frac{2\pi t}{12}$ κ.λπ. Οπότε

$$L=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

Μπορείτε να επαληθεύσετε με πράξεις ότι για $n\to\infty$ ο πίνακας $B(n)$ είναι

$$B=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\beta^{\kappa}F(-\kappa)F^{T}(-\kappa)$$

Επομένως

$$B=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\beta^{\kappa}\begin{bmatrix}1\\ -\kappa\\ -\sin\frac{2\pi\kappa}{12}\\ \cos\frac{2\pi\kappa}{12}\\ -\sin\frac{4\pi\kappa}{12}\\ \cos\frac{4\pi\kappa}{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\kappa & -\sin\frac{2\pi\kappa}{12} & \cos\frac{2\pi\kappa}{12} & -\sin\frac{4\pi\kappa}{12} & \cos\frac{4\pi\kappa}{12}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\sum_{\kappa=0}^{\infty}\beta^{\kappa} & -\sum_{\kappa=0}^{\infty}\kappa\beta^{\kappa} & -\sum_{\kappa=0}^{\infty}\beta^{\kappa}\sin\frac{2\pi\kappa}{12} & \cdots & \sum_{\kappa=0}^{\infty}\beta^{\kappa}\cos\frac{4\pi\kappa}{12}\\ -\sum_{\kappa=0}^{\infty}\beta^{\kappa}\kappa & -\sum_{\kappa=0}^{\infty}\beta^{\kappa}\kappa^{2} & & \cdots & \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}$$

όπου $\sum_{\kappa=0}^{\infty}\beta^{\kappa}=\frac{1}{1-\beta}$, $\sum_{\kappa=0}^{\infty}\kappa\beta^{\kappa}=\frac{\beta}{(1-\beta)^{2}}$, $\sum_{\kappa=0}^{\infty}\kappa^{2}\beta^{\kappa}=\frac{\beta(1+\beta)}{(1-\beta)^{3}}$ .

Όλες οι άλλες αθροίσεις συγκλίνουν αφού $\sin(.)\le 1$ , $\cos(.)\le 1$.

Για $\beta=0.9$ και για $F(0)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}^{T}$ ευρίσκουμε αριθμητικά

$B^{-1}F(0)=\begin{bmatrix}0.17 & 0.008 & 0.054 & 0.155 & 0.07 & 0.142\end{bmatrix}^{T}$.

Έχοντας κάνει κάποια αρχική εκτίμηση $a(0)$ του διανύσματος $a(.)$, μετά για κάθε χρονική στιγμή $n$=1,2,... και καθώς έρχονται δεδομένα υπολογίζουμε το σφάλμα $\tilde{x}_{n-1}(n)\equiv x(n)-\hat{x}_{n-1}(n)$, όπου $\hat{x}_{n-1}(n)=F^{T}(1)\,a(n-1)$. Βάζουμε την τιμή αυτή στην εξίσωση

(3.7) και υπολογίζουμε το νέο διάνυσμα $a(n)$. Την επόμενη στιγμή ($n$+1) υπολογίζουμε το νέο σφάλμα $\tilde{x}_n(n+1) \equiv x(n+1) - F^T(1)a(n)$ κ.λπ.

## 3.5 Πρόγνωση της κατανομής πιθανότητας

Θεωρούμε μια στοχαστική διαδικασία $X_t$ που είναι αμετάβλητη. Η κατανομή της είναι:

$$F(x,t) = P(X_t \le x) = F(x).$$

Από πραγματικά δεδομένα θα κάνουμε μία εκτίμηση της $F$. Έστω ότι οι τιμές της $X_t$ ευρίσκονται σε ένα διάστημα $[x_0, x_n]$ και διαιρούμε το διάστημα ως εξής:

$$x_0 \le x_1 \le ... \le x_n.$$

Για κάθε τιμή της $X_t$ υπάρχει πάντα ένα $\kappa$ τέτοιο ώστε:

$$x_{\kappa-1} < X_t < x_\kappa .$$

Ορίζουμε την πιθανότητα $P_\kappa \equiv P(x_{\kappa-1} < X_t < x_\kappa)$ για $\kappa = 1,2,...,n$.

Προφανώς:

$$\sum_{\kappa=1}^{n} P_\kappa = 1 \text{ και } P(X_t \le x_\kappa) = F(x_\kappa) = \sum_{i=1}^{\kappa} P_i .$$

Ορίζουμε το διάνυσμα $P \equiv \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_n \end{bmatrix}^T$ και την εκτίμησή του

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} \hat{P}_1 & \hat{P}_2 & \cdots & \hat{P}_n \end{bmatrix}^T$$

οπότε

$$\hat{F}(x_\kappa) = \sum_{i=1}^{\kappa} \hat{P}_i(t) .$$

Παρατηρήσεις της διαδικασίας $X_t$ έρχονται σε ορισμένες χρονικές στιγμές. Έστω ότι μία παρατήρηση ήταν τέτοια ώστε:

$$x_{\kappa-1} < X_t \le x_\kappa .$$

Ορίζουμε το ενδεικτικό διάνυσμα διαστάσεων $n \times 1$:

$$I(t) \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T, \ \kappa = 1,2,..., n$$

όπου στη θέση $\kappa$ υπάρχει το 1 και στις υπόλοιπες το 0. Αν η $X_t$ είναι γνωστή, τότε είναι γνωστό και το $I(t)$.

Για την εκτίμηση $Y(n)$ της μέσης τιμής ενός μεγέθους $X_n$ εφαρμόζουμε την εκθετική εξομάλυνση: $Y(n) = \beta Y(n-1) + (1-\beta)X_n$. Από αυτήν εύκολα ευρίσκομε

$$\hat{P}(t) = \beta \hat{P}(t-1) + (1-\beta) I(t). \qquad \text{(γιατί;)} \qquad (3.8)$$

Από την παραπάνω εξίσωση υπολογίζουμε την $F(X_\kappa)$. Έστω τώρα ότι θέλουμε την εκτίμηση ενός σημείου $\xi$ τέτοιου, ώστε:

$$F(\xi) = P \text{ για δεδομένο } P.$$

Τότε ευρίσκουμε δύο πιθανότητες $F(x_{\kappa-1})$ και $F(x_\kappa)$ έτσι ώστε: $F(x_{\kappa-1}) < P \le F(x_\kappa)$,

απ' όπου με γραμμική παρεμβολή

$$\xi = x_{\kappa-1} + \frac{[P - F(x_{\kappa-1})][x_\kappa - x_{\kappa-1}]}{F(x_\kappa) - F(x_{\kappa-1})}. \qquad \text{(γιατί;)} \qquad (3.9)$$

**Παράδειγμα 3.6**

Η ζήτηση ενός προϊόντος έχει τις ακόλουθες διακυμάνσεις για τη χρονική στιγμή $t-1$:

| $\kappa$ | $X_\kappa$ | $\hat{P}(t-1)$ |
|---|---|---|
| 1 | 10 | 0.6 |
| 2 | 20 | 0.15 |
| 3 | 30 | 0.15 |
| 4 | 40 | 0.05 |
| 5 | 50 | 0.05 |

Στη χρονική στιγμή $t$ η ζήτηση είναι $X_t = 34$, που σημαίνει ότι $P(30 < X_t \le 40) = P_4 = 1$, και οι υπόλοιπες πιθανότητες 0. Έστω ότι $\beta = 0.9$, τότε

$$\hat{P}(t) = 0.9 \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.15 \\ 0.15 \\ 0.05 \\ 0.05 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.54 \\ 0.135 \\ 0.135 \\ 0.145 \\ 0.045 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{P}_{10} \\ \hat{P}_{20} \\ \hat{P}_{30} \\ \hat{P}_{40} \\ \hat{P}_{50} \end{bmatrix}.$$

Άρα $F(0) = 0$,

$\hat{F}(10)=\hat{P}_{10}(t)=0.54$, $\hat{F}(20)=\hat{P}_{10}+\hat{P}_{20}=0.675$, $\hat{F}(30)=\hat{P}_{10}+\hat{P}_{20}+\hat{P}_{30}=0.81$, $\hat{F}(40)=\cdots=0.955$, $\hat{F}(50)=\cdots=1$.

Τώρα ζητούμε την τιμή εκείνη της ζήτησης ώστε η πιθανότητα ζήτησης να είναι 0.9 ή $\hat{F}(\xi)=0.9$ οπότε $\hat{F}(30)<\hat{F}(\xi)<\hat{F}(40)$

$$\Rightarrow \xi=\frac{(0.9-0.81)(40-30)}{0.955-0.81}=36.2 .$$

## 3.6 Εκτίμηση Bayes

## (Bayes estimation)

Αρχίζουμε με μερικές γενικότητες από τη θεωρία εκτιμήσεων. Έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε μία τυχαία μεταβλητή $Y$ με μία συνάρτηση $g(X)$ μίας άλλης τυχαίας μεταβλητής $X$, έτσι ώστε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα

$$E[Y-g(X)]^2 \text{ να είναι ελάχιστο.}$$

Αρχικά θεωρούμε την $g(X) = \alpha$ = σταθερή. Τότε

$$E(Y-a)^2=E(Y^2)+2aE(Y)+a^2 .$$

Παραγωγίζουμε ως προς $\alpha$:

$$-2E(Y) + 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = E(Y)$$

που κατά κάποιο τρόπο αντιστοιχεί στο μέσο όρο που είδαμε ήδη. Βλέπουμε εδώ ότι η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής έχει την ιδιότητα να ελαχιστοποιεί το $E[Y-a]^2$ ή ότι το $E[Y-\overline{Y}]^2$ είναι minimum.

Συνεχίζουμε με μια εν γένει συνάρτηση $g(X)$. Τώρα

$$E[Y-g(X)]^2=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[y-g(x)]^2 f(x,y)\,dx\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\int_{-\infty}^{\infty}[y-g(x)]^2 f(y\,|\,x)\,dy\,dx .$$

Αφού το $f(x)$ είναι δεδομένο, ελαχιστοποιούμε το

$$\int_{-\infty}^{\infty}[y-g(x)]^2 f(y\,|\,x)\,dy$$

ως προς $x$. Το ολοκλήρωμα αυτό είναι η δεύτερη ροπή της $f(x\,|\,y)$ ως προς τη σταθερά

$g(x)$. Αλλά ήδη βρήκαμε ότι η δεύτερη ροπή της $Y$ ως προς μία σταθερά ελαχιστοποιείται από τη μέση τιμή, ή

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y \mid x) dy = E(y \mid x),$$

η οποία είναι η γενική λύση του προβλήματος εκτίμησης μέσου τετραγώνου.

Παρατηρούμε $n$ μετρήσεις $x_1,....,x_n$ και θέλουμε να εκτιμήσουμε κάποια παράμετρο σχετική μ' αυτές τις μετρήσεις (πχ. την $x_{n+1}$). Έστω αυτή η παράμετρος ότι είναι $\theta$, τότε

$$\hat{\theta} = E(\theta | x_1,...,x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta f(\theta | x_1,...,x_n) d\theta .$$

Υπολογίζουμε την υπό συνθήκη πυκνότητα

$$\begin{aligned} f(\theta \mid x_1,...,x_n) &= \frac{f_1(x_1,...,x_n \mid \theta) f_2(\theta)}{f_3(x_1,...,x_n)} \\ &= \frac{f_1(x_1,...,x_n \mid \theta) f_2(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_4(x_1,...,x_n,\theta) d\theta} \\ &= \frac{f_1(x_1,...,x_n \mid \theta) f_2(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1,...,x_n \mid \theta) f_2(\theta) d\theta} \end{aligned}$$

όπου $f_1, f_2, f_3, f_4$ είναι πυκνότητες πιθανότητας.

Θεωρούμε τώρα την εξής περίπτωση. Κάποια διαδικασία όπως η ζήτηση, έχει μέση τιμή $\mu$. Αυτή η μέση τιμή θα είναι και η εκτιμητέα ποσότητα. Γνωρίζουμε ότι το $\mu$ μεταβάλλεται από στατιστικό πληθυσμό σε πληθυσμό (από εποχή σε εποχή φερ' ειπείν) και η μέση του τιμή είναι $\mu_0$.

Δεχόμαστε μια σειρά μετρήσεων $x_1$, ... , $x_n$ και από αυτήν θέλουμε την εκτίμηση $\hat{\mu}$ του $\mu$. Η πλέον λογική εκτίμηση εδώ είναι:

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{και} \quad E(\bar{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(x_i) = \mu .$$

Έστω ότι η μεταβλητότητα κάθε τυχαίας μεταβλητής $x_i$ είναι $\sigma^2$.

Τότε $Var\left(\frac{1}{n}\sum_i x_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_i Var(x_i) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$.

Από το κεντρικό οριακό θεώρημα και για $n >>$ το $\bar{x}$ είναι Gauss άρα:

$$f_1(\bar{x} \mid \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 / n}} e^{-\frac{(\bar{x}-\mu)^2}{2\sigma^2 / n}}.$$

Από το θεώρημα Bayes

$$f(\mu \mid \bar{x}) = \frac{f_1(\bar{x} \mid \mu) f_2(\mu)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\bar{x} \mid \mu) f_2(\mu) d\mu}.$$

Έστω ότι $\mu \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$ , επομένως

$$f(\mu \mid \bar{x}) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 / n}} e^{-\frac{(\bar{x}-\mu)^2}{2\sigma^2 / n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}}}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 / n}} e^{-\frac{(\bar{x}-\mu)^2}{2\sigma^2 / n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}} d\mu}.$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος στον παρονομαστή κάνουμε τις πράξεις στους εκθέτες, συμπληρώνουμε το τετράγωνο ως προς $\mu$ και μετά από λίγη άλγεβρα βρίσκουμε:

$$f(\mu \mid \bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\left[\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{\sigma^2 / n}\right]}} \times e^{-\frac{\left(\mu - \frac{\bar{x}\sigma_0^2 + \mu_0\sigma^2 / n}{\sigma_0^2 + \sigma^2 / n}\right)^2}{2\left(\sqrt{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{\sigma^2 / n}}\right)^2}}.$$

Βλέπουμε ότι το $\mu$ δοθέντος του $\bar{x}$ είναι Gauss με μέση τιμή

$$E(\mu \mid \bar{x}) = \hat{\mu}(n)$$

ή

$$\hat{\mu}(n) = \frac{\bar{x}\sigma_0^2 + \mu_0 \dfrac{\sigma^2}{n}}{\sigma_0^2 + \dfrac{\sigma^2}{n}} = \frac{n\sigma_0^2}{n\sigma_0^2 + \sigma^2}\bar{x} + \frac{\sigma^2}{n\sigma_0^2 + \sigma^2}\mu_0 .$$

**Παράδειγμα 3.7**

Κάποιο προϊόν έχει ζήτηση της οποίας τη μέση τιμή θέλουμε να εκτιμήσουμε. Από πείρα ξέρουμε ότι $\mu \sim N(200{,}25)$. Επίσης από πείρα ξέρουμε ότι $\sigma^2$ =2500. Έχουμε 25 δεδομένα από το παρελθόν με μέση τιμή $\bar{x}$ .

Η εκτίμηση είναι:

$$\mu(25) = \frac{25 \cdot 25}{25 \cdot 25 + 2500}\bar{x} + \frac{2500}{25 \cdot 25 + 2500}200 = \frac{\bar{x}}{5} + \frac{4}{5}200 .$$

Βλέπουμε ότι η εκτίμηση Bayes δίνει τετραπλάσιο βάρος στην πεπερασμένη εμπειρία απ' ότι στο $\bar{x}$ .

## 3.7 Μοντέλα με εξαρτημένες παρατηρήσεις (Box-Jenkins models)

Ως τώρα υποθέσαμε ότι έχουμε μία σειρά ανεξάρτητων παρατηρήσεων $X_1,...,X_n$ από την οποία κάνουμε την εκτίμηση του $\mu$. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις που οι παρατηρήσεις είναι εξαρτημένες. Τότε χρησιμοποιούμε για την πρόβλεψη μοντέλα Κινούμενου Μέσου Όρου (Moving Average - MA), Αυτοπαλινδρόμησης (Autoregressive - AR), Αυτοταλαντούμενου Κινητού Μέσου (Autoregressive Moving Average - ARMA) και Αυτοταλαντούμενου Ολοκληρωμένου Κινητού Μέσου (Autoregressive Integrated Moving Average - ARIMA), ή μοντέλα χρονοσειρών.

Υποθέτουμε ότι η εξαρτημένη διαδικασία είναι γραμμικός συνδυασμός ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών:

$$z_t = \mu + \mathrm{a}_t + y_1\mathrm{a}_{t-1} + ... \tag{3.10}$$

Η διακεκριμένη ακολουθία $\{\mathrm{a}_t\}$ είναι ανεξάρτητη, Gauss, με μέση τιμή 0, άρα λευκή ακολουθία.

Έστω τώρα ότι θεωρούμε μόνο τους $q$ πρώτους όρους της σειράς και την ακόλουθη παραλλαγή:

$$z_t - \mu = \mathrm{a}_t - \theta_1 \mathrm{a}_{t-1} - \ldots - \theta_q \mathrm{a}_{t-q}\,.$$

Ορίζουμε $z_t - \mu \equiv \tilde{z}_t$ οπότε

$$\tilde{z}_t = \mathrm{a}_t - \sum_{i=1}^{q} \theta_i \mathrm{a}_{t-i}\,. \tag{3.11}$$

Στη συνέχεια ορίζουμε τον **τελεστή αντίστροφης μετατόπισης** $B$:

$$B\mathrm{a}_t \equiv \mathrm{a}_{t-1}\,,\ \ B^j \mathrm{a}_t \equiv \mathrm{a}_{t-j}\,.$$

Η (3.11) γράφεται:

$$\tilde{z}_t = \left(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q\right) \mathrm{a}_t = \Theta(B)\mathrm{a}_t\,. \tag{3.12}$$

Η εξίσωση (3.12) λέγεται **διαδικασία κινητού μέσου όρου** τάξης $q$ ή MA($q$). Οι διαδικασίες MA(1) και MA(2) είναι

$$\tilde{z}_t = \mathrm{a}_t - \theta_1 \mathrm{a}_{t-1}\,,$$

$$\tilde{z}_t = \mathrm{a}_t - \theta_1 \mathrm{a}_{t-1} - \theta_2 \mathrm{a}_{t-2}\,.$$

Το μοντέλο, εν γένει, έχει $q$ +2 αγνώστους: $\mu, \theta_1, \ldots, \theta_q, \sigma_a^2$.

Τώρα εξετάζουμε τα λεγόμενα μοντέλα AR. Η διαδικασία $\tilde{z}_t$ μοντελοποιείται από:

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \ldots + \phi_p \tilde{z}_{t-p} + \mathrm{a}_t \tag{3.13}$$

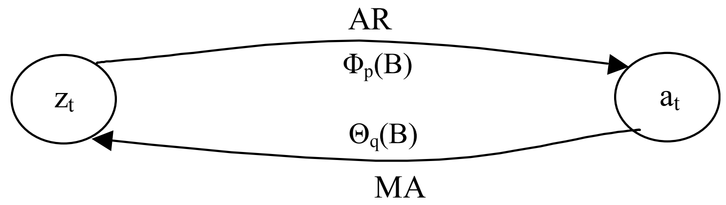
η οποία λέγεται **αυτοταλαντούμενη διαδικασία** AR($p$), επειδή η $\tilde{z}_t$ προσαρμόζεται σε παλιές τιμές της στο $t-1$, $t-2$, κ.λπ. Χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο τελεστή ευρίσκουμε:

$$\tilde{z}_t = \phi_1 B\, \tilde{z}_t + \ldots + \phi_p B^p\, \tilde{z}_t + \mathrm{a}_t \qquad \text{ή}$$

$$\left(1 - \phi_1 B - \ldots - \phi_p B^p\right) \tilde{z}_t = \mathrm{a}_t \qquad \text{ή}$$

$$\Phi(B)\tilde{z}_t = \mathrm{a}_t\,. \tag{3.14}$$

Το μοντέλο έχει $p + 2$ αγνώστους, $\mu, \phi_1, \ldots, \phi_p, \sigma_a^2$, που θα εκτιμηθούν από τα δεδομένα.




Από το σχήμα φαίνεται μια δυαδική συμπεριφορά ανάμεσα στα μοντέλα AR και MA. Είναι ενδιαφέρον να δούμε αυτή τη δυαδικότητα αναλυτικά. Έστω η διαδικασία MA(1)

$$\tilde{z}_t = \mathrm{a}_t - \theta_1 \mathrm{a}_{t-1} = (1-\theta_1 B)\mathrm{a}_t \Rightarrow \mathrm{a}_t = (1-\theta_1 B)^{-1}\tilde{z}_t$$

και αν $|\theta_1| < 1$ τότε

$$\mathrm{a}_t = \left(1 + \theta_1 B + \theta_1^2 B^2 + \ldots\right)\tilde{z}_t$$

που είναι διαδικασία AR(∞).

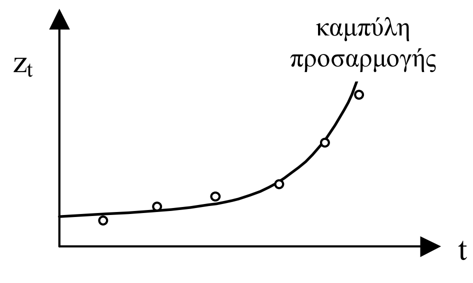
Τα δύο μοντέλα AR και MA μπορούν να συνδυασθούν και έτσι έχουμε τη **διαδικασία** ARMA($p$, $q$):

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \ldots + \phi_p \tilde{z}_{t-p} - \theta_1 \mathrm{a}_{t-1} - \ldots - \theta_q \mathrm{a}_{t-q} + \mathrm{a}_t \qquad (3.15)$$

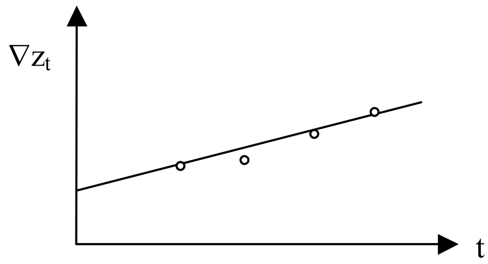
όπου από τα δεδομένα θα προσδιορίσουμε $p + q + 2$ αγνώστους: $\mu, \phi_1, \ldots, \phi_p, \theta_1, \ldots, \theta_q, \sigma_a^2$.

Ένα ακόμη γενικότερο μοντέλο είναι ο **αυτοταλαντούμενος ολοκληρωμένος κινητός μέσος** όρος (Autoregressive Integrated Moving Average), ή ARIMA. Το μοντέλο αυτό χρησιμοποιείται όταν τα δεδομένα είναι τέτοια ώστε κάποιο χαρακτηριστικό να είναι μεταβαλλόμενο, συνήθως η μέση τιμή $\mu$.

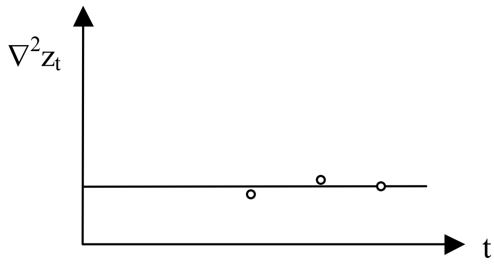
Έστω ότι έχουμε τα δεδομένα:




Αν πάρουμε την πρώτη διαφορά τότε έχουμε:




και τη δεύτερη:




Μετά δηλαδή από δύο διαφορές η διαδικασία έγινε αμετάβλητη. Η διαφορά ορίζεται σαν:

$$\nabla z_t \equiv z_t - z_{t-1}$$

άρα

$$\nabla = 1 - B, \quad ..., \quad \nabla^d = (1 - B)^d .$$

Εν γένει μετά από $d$ διαφορές η διαδικασία γίνεται χρονικά αμετάβλητη.

Ορίζουμε τη νέα διαδικασία:

$$w_t \equiv \nabla^d z_t .$$

Όταν η διαδικασία $z_t$ γίνει αμετάβλητη τότε μπορούμε να γράψουμε ένα μοντέλο της $w_t$ σαν ARMA, αλλά τώρα το μοντέλο της $z_t$ είναι ARIMA($p$, $d$, $q$):

$$\Phi_p(B)\nabla^d z_t = \Theta_q(B)\mathrm{a}_t$$

ή

$$\Phi_p(B)w_t = \Theta_q(B)\mathrm{a}_t . \tag{3.16}$$

Το μοντέλο $\mathrm{ARIMA}(p, d, q)$ περιλαμβάνει τα προηγούμενα˙ για $d = 0$ γίνεται $\mathrm{ARMA}(p, q)$.

Το βασικό κριτήριο για την καταλληλότητα του μοντέλου είναι η γειτνίαση των συντελεστών συσχέτισης των δεδομένων με το 0, έτσι ώστε τα δεδομένα να είναι λευκές ακολουθίες. Η **αυτοσυσχέτιση** με καθυστέρηση $\kappa$ είναι:

$$\rho_\kappa = \frac{E[(z_t-\mu)(z_{t+\kappa}-\mu]}{\sigma_z^2}$$

της οποίας μια καλή εμπειρική εκτίμηση δίνεται από:

$$r_\kappa \equiv \hat{\rho}_\kappa = \frac{c_\kappa}{c_0}$$

$$c_\kappa = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-\kappa}(z_t-\bar{z})(z_{t+\kappa}-\bar{z}), \quad \kappa = 0,1,...,M$$

όπου συνήθως $M \le \frac{N}{4}$ και $N$ είναι ο αριθμός δεδομένων.

**Παράδειγμα 3.8**

Έστω τα δεδομένα, με $\bar{z} = 51$

| $t$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_t$ | 47 | 64 | 23 | 71 | 38 | 64 | 55 | 41 | 59 | 48 |
| $z_t-\bar{z}$ | -4 | 13 | -28 | 20 | -13 | 13 | 4 | -10 | 8 | -3 |

$$\sum_{t=1}^{9}(z_t-z)(z_{t+1}-z) = -14\cdot 13 + 13(-28) + ... + 8(-3) = -1497,$$

$$c_1 = \frac{-1497}{10} = -149.7\,,\ c_0 = 189.6\,,\ r_1 = \frac{c_1}{c_0} = \frac{-149.7}{189.6} = -0.79\,,$$

άρα τα δεδομένα δεν είναι λευκή διαδικασία.

Τώρα υπολογίζουμε την αυτοσυσχέτιση της διαδικασίας AR. Έχουμε:

$$\tilde{z}_t = \phi_1\tilde{z}_{t-1} + ... + \phi_p\tilde{z}_{t-p} + \mathrm{a}_t\,.$$

Πολλαπλασιάζουμε επί $\tilde{z}_{t-\kappa}$:

$$\tilde{z}_{t-\kappa}\tilde{z}_t = \phi_1\tilde{z}_{t-\kappa}\tilde{z}_{t-1} + ... + \phi_p\tilde{z}_{t-\kappa}\tilde{z}_{t-p} + \tilde{z}_{t-\kappa}\mathrm{a}_t\,.$$

Παίρνουμε προσδοκητή τιμή

$$\gamma_\kappa = \phi_1\gamma_{\kappa-1} + ... + \phi_p\gamma_{\kappa-p}\,, \qquad \kappa > 0$$

επειδή $E(\tilde{z}_{t-\kappa}\mathrm{a}_k) = 0$, αφού η διαδικασία $\mathrm{a}_t$ είναι ασυσχέτιστη από την $\tilde{z}_t$ για $\kappa > 0$ και $E(\mathrm{a}_t) = 0$. Διαιρούμε δια $\gamma_0$ και η αυτοσυσχέτιση γίνεται:

$$\rho_\kappa = \varphi_1\rho_{\kappa-1} + ... + \varphi_p\rho_{\kappa-p}\,, \quad \kappa > 0.$$

Αντικαθιστώντας $\kappa$ =1,2,...,$p$ και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ισότητες $\rho_\nu = \rho_{-\nu}$ και $\rho_0 = \frac{c_0}{c_0} = 1$,

$$\rho_1 = \varphi_1 + \varphi_2 \rho_1 + \ldots + \varphi_p \rho_{p-1}$$

$$\vdots$$

$$\rho_p = \varphi_1 \rho_{p-1} + \ldots + \varphi_p$$

που λέγονται εξισώσεις Yule-Walker. Διανυσματικά:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{\kappa-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & & \rho_{\kappa-2} \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ \rho_{\kappa-1} & \rho_{\kappa-2} & \rho_{\kappa-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_{\kappa 1} \\ \varphi_{\kappa 1} \\ \vdots \\ \\ \varphi_{\kappa\kappa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \\ \rho_\kappa \end{bmatrix}$$

όπου αντί για $\varphi_j$ γράψαμε $\varphi_{\kappa j}$, που είναι ο όρος $j$ για τη διαδικασία AR($\kappa$). Αν χρησιμοποιήσουμε τις εκτιμήσεις $r_j$ του $\rho_j$, τότε έχουμε τις εκτιμήσεις $\hat{\varphi}_{\kappa j}$ του $\varphi_{\kappa j}$:

$$r_j = \hat{\varphi}_{\kappa 1} r_{j-1} + \ldots + \hat{\varphi}_{\kappa(\kappa-1)} r_{j-\kappa+1} + \hat{\varphi}_{\kappa\kappa} r_{j-\kappa}, \qquad j = 1,2,\ldots,\kappa.$$

Αν τώρα από ένα σημείο $\kappa$ και μετά των δεδομένων ο συντελεστής $\hat{\varphi}_{\kappa\kappa}$ είναι << (π.χ. μικρότερος του $2\hat{\sigma}_{\varphi_{\kappa\kappa}} \approx 2/\sqrt{N}$, όπου $N$ είναι ο αριθμός δεδομένων με τα οποία εκτιμούμε τα $r_j$), τότε το μοντέλο πρέπει να είναι AR($\kappa$) αφού οι συντελεστές είναι $\approx 0$. Για να κάνουμε πρόγνωση πρώτα ευρίσκουμε το μοντέλο που είναι κατάλληλο για τα δεδομένα $z_t$. Η καταλληλότητα του μοντέλου ελέγχεται από την αυτοσυσχέτιση των υπολοίπων

$$e_t = z_t - \hat{z}_t$$

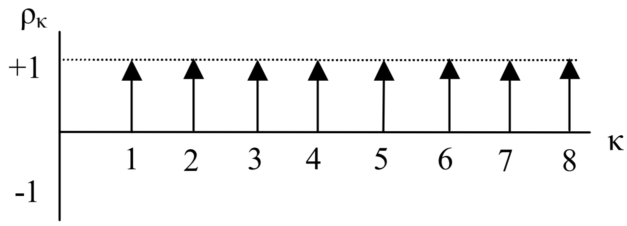
τα οποία, μπορεί να αποδειχθεί, πρέπει να είναι λευκοί θόρυβοι.

**Παράδειγμα 3.9**

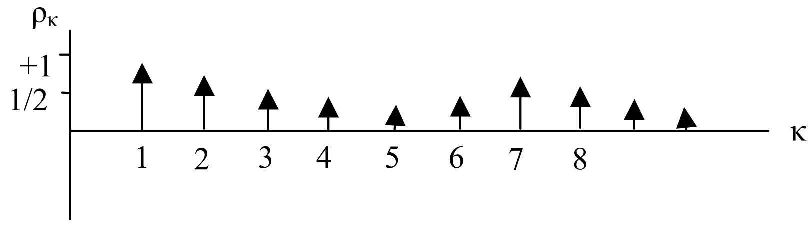
Έχουμε τα δεδομένα του πίνακα 3.1. Παρατηρούμε ότι η διαδικασία δεν είναι αμετάβλητη, αφού ο μέσος όρος της αυξάνει συνεχώς. Παίρνουμε την πρώτη διαφορά $w_t = \nabla z_t$, που εικονίζεται στον πίνακα 3.2. Από τα δεδομένα $w_t$ υπολογίζουμε τους συντελεστές $r_1, r_2, \ldots$ από τον τύπο $\rho_\kappa = \frac{c_\kappa}{c_0}$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε

$$\hat{\varphi}_{11} = r_1, \quad \hat{\varphi}_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & r_1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_1 \\ r_1 & 1 \end{vmatrix}}, \qquad \hat{\varphi}_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_1 \\ r_1 & 1 & r_2 \\ r_2 & r_1 & r_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_2 \\ r_1 & 1 & r_1 \\ r_2 & r_1 & 1 \end{vmatrix}}, \ldots$$

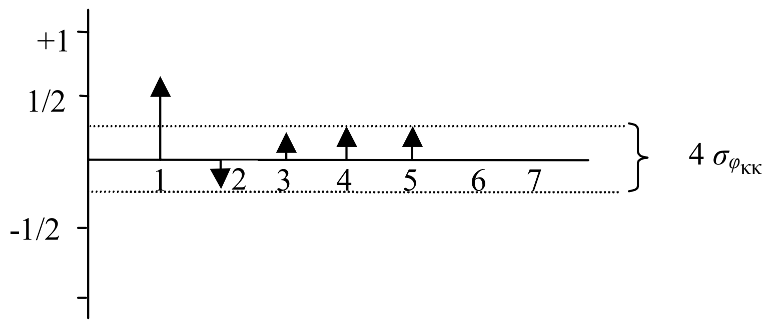
Η αυτοσυσχέτιση των $z_t$ φαίνεται στη συνέχεια:




ενώ η αυτοσυσχέτιση των $w_t$ είναι:




Οι συντελεστές $\hat{\rho}_k$ παρουσιάζουν ημιτονοειδή απόσβεση που είναι χαρακτηριστική αμετάβλητων διαδικασιών και άρα το μοντέλο θα είναι ARIMA($p$,1,$q$). Οι συντελεστές $\hat{\varphi}_{\kappa\kappa}$ είναι:




Βλέπουμε ότι για $\kappa$ =3 οι συντελεστές είναι < $2\sigma_{\varphi_{\kappa\kappa}}$ κατ' απόλυτη τιμή και άρα χρησιμοποιούμε το μοντέλο ARIMA(2,1,$q$).

**Πίνακας 3.1** Η χρονοσειρά $z_t$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 592 | 1208 | 1864 | 2508 | 3160 | 3792 | 4419 | 5023 | 5626 | 6250 |
| 6903 | 7564 | 8223 | 8900 | 9569 | 10226 | 10823 | 11304 | 11785 | 12252 |
| 12724 | 13339 | 13940 | 14514 | 15102 | 15648 | 16212 | 16725 | 17217 | 17839 |
| 18463 | 19094 | 19718 | 20342 | 20966 | 21563 | 22167 | 22802 | 23431 | 24044 |
| 24562 | 25131 | 25676 | 26205 | 26718 | 27215 | 27767 | 28389 | 28974 | 29502 |
| 30022 | 30542 | 31044 | 31556 | 32092 | 32636 | 33196 | 33772 | 34347 | 34915 |
| 35502 | 36078 | 36643 | 37219 | 37804 | 38381 | 38974 | 39513 | 40044 | 40634 |
| 41237 | 41853 | 42430 | 42977 | 43529 | 44081 | 44657 | 45277 | 45917 | 46517 |
| 47100 | 47692 | 48241 | 48802 | 49399 | 49992 | 50601 | 51214 | 51855 | 52499 |
| 53127 | 53763 | 54387 | 54979 | 55591 | 56219 | 56843 | 57491 | 58127 | 58767 |
| 59264 | 59777 | 60298 | 60779 | 61348 | 61942 | 62521 | 63041 | 63576 | 64082 |
| 64550 | 65074 | 65594 | 66168 | 66664 | 67204 | 67711 | 68272 | 68837 | 69414 |
| 70012 | 70617 | 71211 | 71701 | 72214 | 72740 | 73283 | 73889 | 74509 | 75115 |
| 75743 | 76351 | 76971 | 77585 | 78169 | 78745 | 79309 | 79918 | 80563 | 81184 |
| 81761 | 82318 | 82855 | 83384 | 83921 | 84476 | 85028 | 85647 | 86275 | 86889 |
| 87493 | 88097 | 88737 | 89361 | 90017 | 90668 | 91313 | 91938 | 92575 | 93156 |
| 93669 | 94182 | 94695 | 95201 | 95679 | 96183 | 96783 | 97397 | 97989 | 98603 |
| 99223 | 99839 | 100478 | 101095 | 101724 | 102333 | 102902 | 103516 | 104157 | 104784 |
| 105411 | 106026 | 106626 | 107214 | 107806 | 108418 | 109048 | 109688 | 110321 | 110961 |
| 111586 | 112211 | 112828 | 113437 | 114038 | 114663 | 115288 | 115904 | 116519 | 117121 |
| 117688 | 118280 | 118916 | 119548 | 120130 | 120647 | 121210 | 121773 | 122350 | 122947 |
| 123540 | 124102 | 124705 | 125255 | 125769 | 126325 | 126893 | 127501 | 128133 | 128769 |
| 129402 | 129994 | 130491 | 130996 | 131565 | 132142 | 132719 | 133280 | 133863 | 134435 |
| 134997 | 135587 | 136187 | 136812 | 137424 | 138024 | 138648 | 139272 | 139909 | 140534 |
| 141171 | 141768 | 142329 | 142878 | 143423 | 144000 | 144585 | 145168 | 145738 | 146294 |
| 146832 | 147364 | 147920 | 148520 | 149128 | 149744 | 150342 | 150902 | 151407 | 151895 |
| 152396 | 152885 | 153390 | 153939 | 154520 | 155129 | 155742 | 156374 | 157006 | 157648 |
| 158295 | 158951 | 159655 | 160339 | 161039 | 161723 | 162410 | 163050 | 163698 | 164366 |
| 165031 | 165680 | 166321 | 166934 | 167559 | 168193 | 168882 | 169580 | 170277 | 170954 |
| 171602 | 172220 | 172852 | 173500 | 174136 | 174764 | 175364 | 175956 | 176560 | 177197 |

**Πίνακας 3.2** Η χρονοσειρά $\nabla z_t \nabla z_i$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 592 | 616 | 656 | 644 | 652 | 632 | 627 | 604 | 603 | 624 |
| 653 | 661 | 659 | 677 | 669 | 657 | 597 | 481 | 481 | 467 |
| 472 | 615 | 601 | 574 | 588 | 546 | 564 | 513 | 492 | 622 |
| 624 | 631 | 624 | 624 | 624 | 597 | 604 | 635 | 629 | 613 |
| 518 | 569 | 545 | 529 | 513 | 497 | 552 | 622 | 585 | 528 |
| 520 | 520 | 502 | 512 | 536 | 544 | 560 | 576 | 575 | 568 |
| 587 | 576 | 565 | 576 | 585 | 577 | 593 | 539 | 531 | 590 |
| 603 | 616 | 577 | 547 | 552 | 552 | 576 | 620 | 640 | 600 |
| 583 | 592 | 549 | 561 | 597 | 593 | 609 | 613 | 641 | 644 |
| 628 | 636 | 624 | 592 | 612 | 628 | 624 | 648 | 636 | 640 |
| 497 | 513 | 521 | 481 | 569 | 594 | 579 | 520 | 535 | 506 |
| 468 | 524 | 520 | 574 | 496 | 540 | 507 | 561 | 565 | 577 |
| 598 | 605 | 594 | 490 | 513 | 526 | 543 | 606 | 620 | 606 |
| 628 | 608 | 620 | 614 | 584 | 576 | 564 | 609 | 645 | 621 |
| 577 | 557 | 537 | 529 | 537 | 555 | 552 | 619 | 628 | 614 |
| 604 | 604 | 640 | 624 | 656 | 651 | 645 | 625 | 637 | 581 |
| 513 | 513 | 513 | 506 | 478 | 504 | 600 | 614 | 592 | 614 |
| 620 | 616 | 639 | 617 | 629 | 609 | 569 | 614 | 641 | 627 |
| 627 | 615 | 600 | 588 | 592 | 612 | 630 | 640 | 633 | 640 |
| 625 | 625 | 617 | 609 | 601 | 625 | 625 | 616 | 615 | 602 |
| 567 | 592 | 636 | 632 | 582 | 517 | 563 | 563 | 577 | 597 |
| 593 | 562 | 603 | 550 | 514 | 556 | 568 | 608 | 632 | 636 |
| 633 | 592 | 497 | 505 | 569 | 577 | 577 | 561 | 583 | 572 |
| 562 | 590 | 600 | 625 | 612 | 600 | 624 | 624 | 637 | 625 |
| 637 | 597 | 561 | 549 | 545 | 577 | 585 | 583 | 570 | 556 |
| 538 | 532 | 556 | 600 | 608 | 616 | 598 | 560 | 505 | 488 |
| 501 | 489 | 505 | 549 | 581 | 609 | 613 | 632 | 632 | 642 |
| 647 | 656 | 704 | 684 | 700 | 684 | 687 | 640 | 648 | 668 |
| 665 | 649 | 641 | 613 | 625 | 634 | 689 | 698 | 697 | 677 |
| 648 | 618 | 632 | 648 | 636 | 628 | 600 | 592 | 604 | 637 |

Το μοντέλο AR(2) είναι εύκολο να υπολογισθεί με τη θεωρία ελαχίστων τετραγώνων, ενώ το μοντέλο MA(2) απαιτεί εργαλεία από τη μη γραμμική θεωρία εκτιμήσεων. Έστω λοιπόν ότι χρησιμοποιούμε το ARIMA(2,1,0). Το AR(2) είναι:

$$\tilde{w}_t = \mathrm{a}_t + \phi_1 \tilde{w}_{t-1} + \phi_2 \tilde{w}_{t-2}$$

που δίνει

$$\widetilde{w} = A\Phi + \mathrm{a}$$

ή

$$\begin{bmatrix} \widetilde{w}_3 \\ \vdots \\ \widetilde{w}_{300} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{w}_2 & \widetilde{w}_1 \\ \vdots & \vdots \\ \widetilde{w}_{299} & \widetilde{w}_{298} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathrm{a}_3 \\ \vdots \\ \mathrm{a}_{300} \end{bmatrix}$$

και $\hat{\Phi} = (A^T A)^{-1} A^T \widetilde{w}$ είναι η βέλτιστη εκτίμηση του $\Phi$, από την οποία $\hat{\phi}_1 = 0.93$, $\hat{\phi}_2 = -0.17$.

Τελικά το ARIMA(2,1,0) είναι:

$$(1 - 0.93B + 0.17B^2)(\nabla z_t - \mu_w) = \mathrm{a}_t$$

ή

$$z_t = z_{t-1} + 0.93(z_{t-1} - z_{t-2}) - 0.17(z_{t-2} - z_{t-3}) + 0.24\mu_w + \mathrm{a}_t .$$

Η αυτοσυσχέτιση των υπολοίπων μεταξύ μοντέλου και δεδομένων είναι $\approx 0$ άρα το μοντέλο είναι καλό.

Η πρόγνωση γίνεται ως εξής:

$$\hat{z}_{301} = z_{300} + 0.93(z_{300} - z_{299}) - 0.17(z_{299} - z_{298}) + 0.24\mu_w = 177830 .$$

Γενικά:

$$\hat{z}_{300+\kappa} = z_{299+\kappa} + 0.93(z_{299+\kappa} - z_{298+\kappa}) - 0.17(z_{298+\kappa} - z_{297+\kappa}) + 0.24\mu_w$$

όπου $\hat{z}_{299+\kappa} = z_{299+\kappa}$, $\kappa$ =2,3,4,...

# IV ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ
## (Scheduling)

### 4.1 Εισαγωγή

Εδώ θ’ ασχοληθούμε με τον προγραμματισμό εργασιών.

Σαν **εργασία** (job) νοείται κάποια λειτουργία που θα γίνει σε μια μηχανή.

**Κατάστημα εργασιών** (job shop) είναι ένα σύνολο μηχανών που επιτελούν ένα η περισσότερα είδη εργασιών.

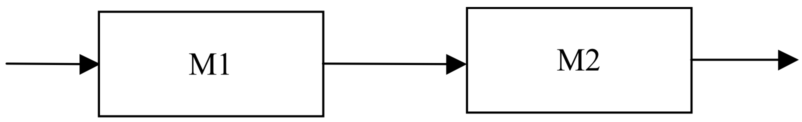
**Χρόνος ροής** (flow time, ή χρόνος υστέρησης - lead time) μιας εργασίας είναι ο συνολικός χρόνος που η εργασία δαπανά στο κατάστημα εργασιών

**Χρόνος περάτωσης** (completion time ή makespan) είναι η χρονική στιγμή που η εργασία εξέρχεται από το κατάστημα εργασιών.

Ο προγραμματισμός θα γίνει έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί κάποιο μέτρο απόδοσης. Σαν οπτικό βοήθημα στον προγραμματισμό, συχνά χρησιμοποιούμε τα **διαγράμματα Gantt**.

**Παράδειγμα 4.1**

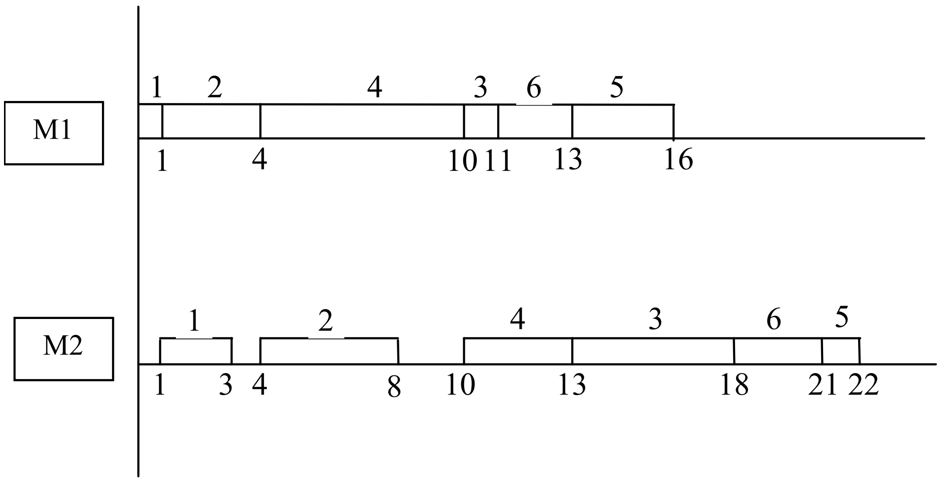
Έστω ότι έχουμε 2 μηχανές 1 και 2 εν σειρά:




Οι **χρόνοι επεξεργασίας**, ή διάρκειες επεξεργασίας (processing times) έχουν ως εξής:

| Εργασία | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 1 | 3 | 1 | 6 | 3 | 2 |
| $M_2$ | 2 | 4 | 5 | 3 | 1 | 3 |

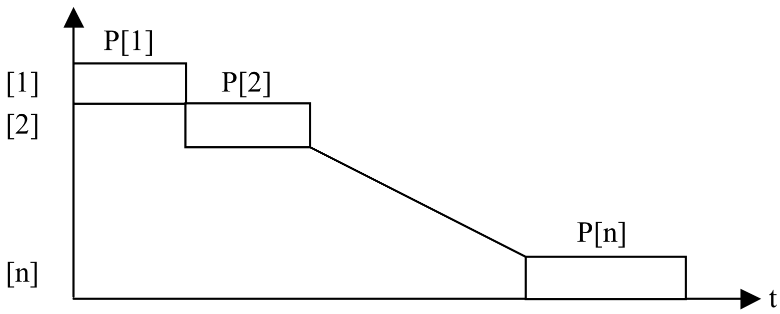
Έστω ότι η ακολουθία εργασιών είναι: {1, 2, 4, 3, 6, 5}. Το διάγραμμα Gantt είναι το ακόλουθο:




## 4.2 Το πρόβλημα *n*|1 (*n*-εργασίες, 1-μηχανή) (*n* jobs, one machine)

Έχουμε μια μηχανή και *n* εργασίες που θα συντελεσθούν. Οι χρόνοι κάθε εργασίας είναι $P[1]$, $P[2]$, ..., $P[n]$, όπου έχουμε συμπεριλάβει και τους χρόνους προετοιμασίας των μηχανών.

Έστω ότι οι *n* εργασίες θα εκτελεσθούν με τη σειρά [1], [2], ...,[*n*].




Ο χρόνος ροής για την εργασία [*κ*] είναι

$$F[\kappa] = \sum_{\kappa=1}^{\kappa} P[i]$$

και ο μέσος χρόνος ροής είναι

$$\overline{F} = \frac{1}{n}\sum_{\kappa=1}^{n} F[\kappa] = \frac{1}{n}\sum_{\kappa=1}^{n}\sum_{i=1}^{\kappa} P[i] = \tfrac{1}{n}\left\{\begin{matrix} P[1]+ \\ P[1]+P[2]+ \\ +\ldots+ \\ P[1]+P[2]+\ldots+P[n] \end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{n}\left(nP[1] + (n-1)P[2] + ... + P[n]\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)P[i].$$

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το πρόγραμμα εκείνο που ελαχιστοποιεί το $\overline{F}$. Σύμφωνα με θεώρημα των Hardy, Littlewood και Polya ([4]), μία ακολουθία που είναι γινόμενο δύο άλλων γίνεται **ελάχιστη** όταν η μία ακολουθία διαταχθεί κατ' αύξουσα τάξη και η άλλη κατά φθίνουσα. Αλλά η $(n-i+1)$ είναι ήδη φθίνουσα. Άρα το βέλτιστο πρόγραμμα είναι:

$$P[1] \le P[2] \le ... \le P[n].$$

Κατά τους ίδιους μαθηματικούς αν οι ακολουθίες έχουν την ίδια τάξη, τότε το γινόμενο γίνεται **μέγιστο**. Άρα η ακολουθία που μεγιστοποιεί το $\overline{F}$ είναι:

$$P[1] \ge P[2] \ge ... \ge P[n].$$

Αν στη συνέχεια θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το μέσο χρόνο ροής με βάρη, τότε το $\overline{F}_w = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_i F[i]$ γίνεται ελάχιστο από την ακολουθία:

$$\frac{P[1]}{w_1} \le \frac{P[2]}{w_2} \le ... \le \frac{P[n]}{w_n}.$$

**Παράδειγμα 4.2**

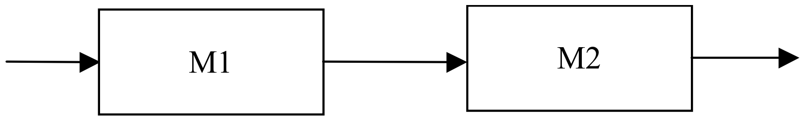
| Εργασία | $P_i$ | $w_i$ | $P_i/w_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 4 | 2 | 2 |
| 3 | 3 | 5 | 0.6 |
| 4 | 1 | 4 | 0.25 |
| 5 | 6 | 2 | 3 |

Χωρίς βάρη η βέλτιστη ακολουθία είναι: { 4, 1, 3, 2, 5 }, και με βάρη: {4, 3, 1, 2, 5 }.

## 4.3 Το πρόβλημα $n|2|F_{\max}$

## ($n$ jobs, two machines)

Τώρα έχουμε *n* εργασίες που θα γίνουν σε 2 μηχανές. Όλες οι εργασίες είναι διαθέσιμες και θα προγραμματισθούν έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί το $F_{\max}$.




Έστω ότι ο χρόνος κατεργασίας της εργασίας $i$ στη μηχανή $j$ είναι $P_{ij}$. Το $F_{\max}$ ελαχιστοποιείται με τον **αλγόριθμο του Johnson**:

1. Εύρετε το $\min_{(i,j)} P_{ij}$ . Αν αυτό συμβαίνει για $j$ = 1, τότε θέσετε την εργασία πρώτη. Αν $j = 2$ , τότε θέσετέ την τελευταία. Σε περίπτωση ισότητας δύο ή περισσοτέρων $P_{ij}$ ρίξτε ένα νόμισμα.
2. Διαγράψτε την εργασία αυτή από τον κατάλογο.
3. Συνεχίστε.

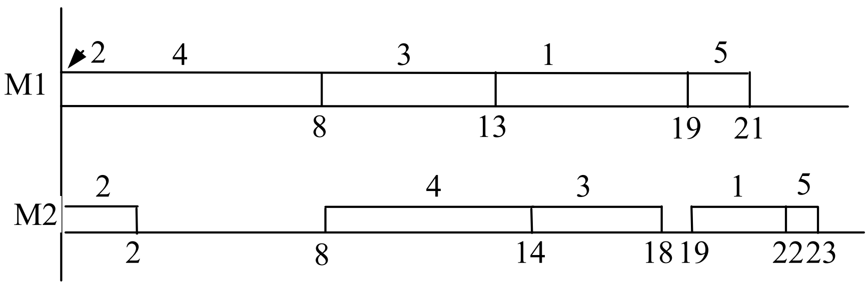
**Παράδειγμα 4.3**

| Εργασία | Πρώτη Λειτουργία | Δεύτερη Λειτουργία |
|---|---|---|
| 1 | 6 | 3 |
| 2 | 0 | 2 |
| 3 | 5 | 4 |
| 4 | 8 | 6 |
| 5 | 2 | 1 |

min $P_{ij}$ = $P_{21}$=0 άρα η εργασία [2] θα εκτελεσθεί πρώτη. Από το πρόγραμμα που μένει αν αφαιρεθεί η [2] βρίσκουμε: min $P_{ij}$ = $P_{52}$ = 1 άρα η εργασία [5] εκτελείται τελευταία κ.ο.κ.

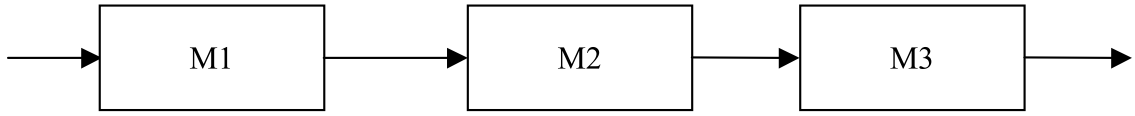
Η βέλτιστη ακολουθία είναι: { 2, 4, 3, 1, 5 }

Το διάγραμμα Gantt είναι:



## 4.4 Το πρόβλημα $n|3|F_{\max}$

**($n$ jobs, three machines)**




Εδώ μπορεί να εφαρμοστεί ο αλγόριθμος Jonson με την προϋπόθεση ότι είτε η $M_1$, ή η $M_3$ επικρατούν της $M_2$, δηλαδή:

$$\min_i P_{i1} \geq \max_i P_{i2}\,,\ \forall\, i \qquad \text{ή}$$

$$\min_i P_{i3} \geq \max_i P_{i2}\,,\ \forall\, i.$$

Τότε προχωρούμε με δύο ψευδομηχανές $M_1'$, $M_2'$ τέτοιες ώστε

$P_{i1}' = P_{i1} + P_{i2}$

$P_{i2}' = P_{i2} + P_{i3}$

**Παράδειγμα 4.4**

| Εργασία | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 2 | 4 |
| 2 | 5 | 4 | 5 |
| 3 | 6 | 1 | 3 |
| 4 | 7 | 3 | 2 |

Εύρετε το πρόγραμμα που ελαχιστοποιεί το $F_{\max}$.

Προφανώς, $\min_i P_{i1} \geq \max_i P_{i2}\,,\ \forall\, i.$

| Ψευδομηχανές | |
|---|---|
| $M_1'$ | $M_2'$ |
| 10 | 6 |
| 9 | 9 |
| 7 | 4 |
| 10 | 5 |

$\min P_{ij} = 4$ άρα η εργασία 3 θα εκτελεσθεί τελευταία

$\min P_{ij} = 5$ η 4 θα εκτελεσθεί τρίτη, κ.ο.κ

Βέλτιστο πρόγραμμα { 2, 1, 4, 3 }.

## 4.5 Προθεσμίες παράδοσης

Ο **χρόνος συμπλήρωσης** $C_i$ μιας εργασίας $i$ είναι ο χρόνος περάτωσης της τελευταίας κατεργασίας.

Υπόθεση: $C_i = F_i$

Εν γένει: $C_i = F_i + r_i$ , όπου $r_i$ είναι ο χρόνος άφιξης.

Η **βραδύτητα** (lateness) μιας εργασίας ορίζεται από τη σχέση $L_i \equiv F_i - d_i = C_i - d_i$, όπου $d_i$ είναι η **προθεσμία παράδοσης** (due date) της εργασίας $i$.

Η **καθυστέρηση** (tardiness) μιας εργασίας είναι: $T_i \equiv \max(0, L_i)$.

Η μέση βραδύτητα $\overline{L}$ **ελαχιστοποιείται** από την ακολουθία $P[1] \leq P[2] \leq \ldots \leq P[n]$ που λέγεται ***SPT*** (Shortest Processing Time).

**Θεώρημα**

Η μέγιστη βραδύτητα και η μέγιστη καθυστέρηση ελαχιστοποιούνται από την ακολουθία:

$$S^* = \left\{ d[1] \leq d[2] \leq \ldots \leq d[n] \right\}.$$

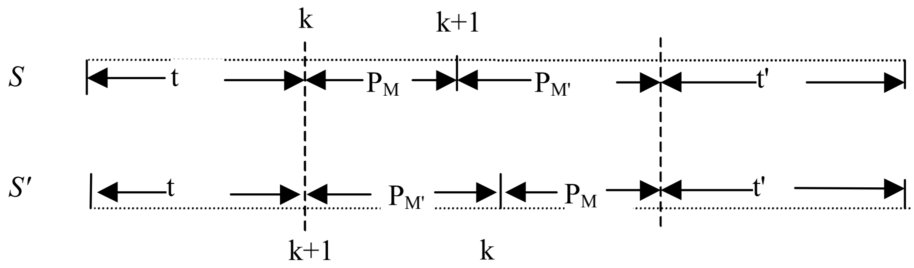
**Παράδειγμα 4.5**

| Εργασία | Ημερομηνία Παράδοσης |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 8 |
| 3 | 5 |
| 4 | 7 |
| 5 | 6 |

$S^* = \{1,3,5,4,2\}$.

*Απόδειξη του θεωρήματος*

Έστω ένα πρόγραμμα $S = S^*$. Στο $S$ υπάρχει μία θέση $\kappa$ τουλάχιστον όπου $d[\kappa] > d[\kappa+1]$. Έστωσαν $M$ και $M'$ οι αριθμοί των αντίστοιχων εργασιών. Τώρα θεωρούμε ένα άλλο πρόγραμμα $S'$ το οποίο διαφέρει απο το $S$ στο ότι η εργασία $M$ είναι στη θέση $\kappa+1$ και η $M'$ στη θέση $\kappa$, ενώ οι άλλες θέσεις είναι ίδιες. Επομένως η βραδύτητα είναι ίδια παντού για τα $S$ και $S'$ εκτός στις θέσεις $\kappa$ και $\kappa+1$. Η βραδύτητα στα σημεία $\kappa$ και $\kappa+1$ είναι:




Έχουμε

$$S: \quad \begin{aligned} L_M(S) &= t + P_M - d_M \\ L_{M'}(S) &= t + P_{M'} + P_M - d_{M'} \end{aligned}$$

$$S': \quad \begin{aligned} L_{M'}(S') &= t + P_{M'} - d_{M'} \\ L_M(S') &= t + P_{M'} + P_M - d_M \end{aligned}$$

Αλλά αφού $d_M > d_{M'}$, τότε

$$L_{M'}(S) > L_M(S')$$

και προφανώς

$$L_{M'}(S) > L_{M'}(S').$$

Άρα

$$L_{M'}(S) > \max\{L_M(S'), L_{M'}(S')\},$$

απ' όπου

$$\max\{L, L_M(S), L_{M'}(S)\} \geq \max\{L, L_M(S'), L_{M'}(S')\}$$

όπου $L$ είναι η μέγιστη βραδύτητα πρίν απο τη θέση $\kappa$. Άρα η εναλλαγή των θέσεων στο $S'$ έφερε βελτίωση της μέγιστης βραδύτητας και επέβαλε ακολουθία αυξουσών ημερομηνιών παράδοσης. Συνεχίζουμε μέχρις ότου καταλήξουμε στο βέλτιστο $S^*$. Για τη μέγιστη καθυστέρηση ισχύει η ίδια ανισότητα αφού

$$T_{\max}(S) = \max\{0, L_{\max}(S)\} \geq \max\{0, L_{\max}(S')\} = T_{\max}(S').$$

## 4.6 Πρόγραμμα για την ελαχιστοποίηση της προετοιμασίας

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου ο χρόνος προετοιμασίας των εγκαταστάσεων εξαρτάται από την ακολουθία εργασιών. Θέλουμε εκείνο το πρόγραμμα που ελαχιστοποιεί το $F$. Έστω $S_{ij}$ ο χρόνος προετοιμασίας των εγκαταστάσεων από την εργασία $i$ στην εργασία $j$. Η διάρκεια επεξεργασίας είναι:

$$F = \sum_{i=1}^{n} S_{[i-1,i]} + \sum_{i=1}^{n} P[i] .$$

Το $F$ γίνεται ελάχιστο όταν το $\sum_{i} S_{[i-1,i]}$ γίνεται ελάχιστο. Αυτό είναι το πρόβλημα του **περιπλανώμενου πωλητή** (traveling salesman).

Ο πωλητής θέλει να επισκεφθεί $n$ πόλεις **μόνο μια φορά** και να επιστρέψει στο αρχικό σημείο έχοντας διανύσει την ελάχιστη απόσταση. Ο αλγόριθμος των Little, Murty, Sweeney και Karel ([5]) που λέγεται **αλγόριθμος διακλάδωσης και ορίου** (branch-and-bound), δίνει μια αποτελεσματική λύση στο πρόβλημα. Εδώ θα εξετάσουμε τη λύση με δυναμικό προγραμματισμό που οφείλεται στον Bellman.

Έχουμε $N$ πόλεις. Έστω σύνολο

$$N_j = \{2, 3, ..., j-1, j+1, ..., N\}$$

και ένα υποσύνολο $S$ του $N_j$ που περιέχει $i$ πόλεις. Έστω το κόστος

$K_i(j, S)$ = η μικρότερη απόσταση από την πόλη 1 στην πόλη $j$ μέσω των $i$ οδών του συνόλου $S$.

Από την αρχή του βελτίστου έχουμε

$$K_i(j.S) = \min_{\kappa \in S}\left[K_{i-1}(\kappa, S-\{\kappa\}) + d_{\kappa j}\right]$$

όπου $d_{\kappa j}$ είναι η απόσταση των πόλεων $\kappa$ και $j$, $j = 1$ και $i = 1,...,N-2$, και η αρχική συνθήκη είναι

$$K_0(j, -) = d_{ij}.$$

Το ελάχιστο κόστος στην τελευταία βαθμίδα υπολογίζεται ως εξής:

$$\min_{j=2,...,N}\left[K_{N-2}(j, N_j) + d_{ji}\right] .$$

**Παράδειγμα 4.6**

$d_{ij}$

| $i \to j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 3 | 1 | 5 | 4 |
| 2 | 1 | 0 | 5 | 4 | 3 |
| 3 | 5 | 4 | 0 | 2 | 1 |
| 4 | 3 | 1 | 3 | 0 | 3 |
| 5 | 5 | 2 | 4 | 1 | 0 |

Προφανώς

$K_0(2, -) = d_{12} = 3$

$K_0(3, -) = 1 \qquad \Leftarrow \quad \min$

$K_0(4, -) = 5$

$K_0(5, -) = 4$

$K_1(2,\{3\}) = K_0(3, -) + d_{32} = 1 + 4 = 5$

$K_1(2,\{4\}) = 5 + 1 = 6$

$K_1(2,\{5\}) = 4 + 2 = 6$

$K_1(3,\{2\}) = 3 + 5 = 8$

$K_1(3,\{4\}) = 5 + 3 = 8$

$K_1(3,\{5\}) = 4 + 4 = 8$

$K_1(4,\{2\}) = 3 + 4 = 7$

$K_1(4,\{3\}) = 1 + 2 = 3$

$K_1(4,\{5\}) = 4 + 1 = 5$

$K_1(5,\{2\}) = 3 + 3 = 6$

$K_1(5,\{3\}) = 1 + 1 = 2 \qquad \Leftarrow \quad \min$

$K_1(5,\{4\}) = 5 + 3 = 8$

$K_2(2,\{3,4\}) = \min\ [K_1(3,\{4\}) + d_{32}, K_1(4,\{3\}) + d_{42}] = \min\ [8 + 4, 3 + 1] = 4$

$K_2(2,\{3,5\}) = \min\ [8 + 4, 2 + 2] = 4$

$K_2(2,\{4,5\}) = \min\ [5 + 1, 8 + 2] = 6$

$K_2(3,\{2,4\}) = \min\ [6 + 5, 7 + 3] = 10$

$K_2(3,\{2,5\}) = \min\ [6 + 5, 6 + 4] = 10$

$K_2(3,\{4,5\}) = \min\ [5 + 3, 8 + 4] = 8$

$K_2(4,\{2,3\}) = \min\ [5 + 4, 8 + 2] = 9$

$K_2(4,\{2,5\}) = \min\ [6 + 4, 6 + 1] = 7$

$K_2(4,\{3,5\}) = \min\ [8 + 2, 2 + 1] = 3 \qquad \Leftarrow \quad \min$

$K_2(5,\{2,3\}) = \min\ [5 + 3, 8 + 1] = 8$

$K_2(5,\{2,4\}) = \min\ [6 + 3, 7 + 3] = 9$

$K_2(5,\{3,4\}) = \min\ [8 + 1, 3 + 3] = 6$

$K_3(2,\{3,4,5\}) = \min\ [K_2(3,\{4,5\}) + d_{32}\ , K_2(4,\{3,5\}) + d_{42}\ , K_2(5,\{3,4\}) + d_{52}\ ]$

$= \min\ [8 + 4, 3 + 1, 6 + 2] = 4 \qquad \Leftarrow \quad \min$

$K_3(3,\{2,4,5\}) = \min\ [6 + 5, 7 + 3, 9 + 4] = 10$

$K_3(4,\{2,3,5\}) = \min\ [4 + 4, 10 + 2, 8 + 1] = 8$

$K_3(5,\{2,3,4\}) = \min\ [4 + 3, 10 + 1, 9 + 3] = 7.$

Το κόστος της τελευταίας βαθμίδας (συνολικό κόστος) είναι:

$K_4(1, \{2,3,4,5\}) =$

$$\min_{j=2,\ldots,5}[K_3(j,\{2,3,4,5\} - \{j\}) + d_{ji}] = \min[4+1, 10+5, 8+3, 7+5] = 5$$

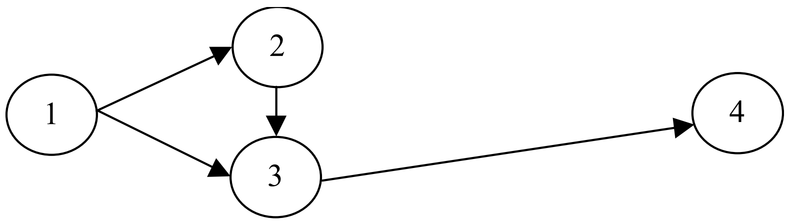
που συμβαίνει για $j = 2$ άρα από την πόλη $2 \to 1$. Αλλά το ελάχιστο 4 αντιστοιχεί στο $K_3(2,\{3,4,5\})$, το οποίο προέρχεται από το 3 + 1 ήτοι το $K_2(4,\{3,5\})$, που με τη σειρά του προέρχεται από το $K_1(5,\{3\})$ και το $K_0(3, -)$. Άρα η βέλτιστη ακολουθία είναι $1 \to 3 \to 5 \to 4 \to 2 \to 1$ και η συνολική απόσταση είναι 5.

### 4.7 Προγραμματισμός πρότζεκτ

Το βασικό πρόβλημα είναι η πρόγνωση της διάρκειας του πρότζεκτ ώστε να παραδοθεί έγκαιρα. Θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό των δικτύων.

Ένα **γράφημα** συνίσταται από **κόμβους** και **τόξα**. Οι κόμβοι συμβολίζονται με γράμματα ή αριθμούς ενώ τα τόξα συμβολίζονται με διατεταγμένα ζεύγη ($x$, $y$) όπου $x$ και $y$ είναι οι κόμβοι που συνδέουν.

Οι κόμβοι αντιστοιχούν σε γεγονότα (π.χ. περάτωση της εγκατάστασης κινητήρων σε αεροπλάνο) ενώ τα τόξα στις διαδικασίες ή δραστηριότητες (π.χ. διαδικασία εγκατάστασης των κινητήρων).

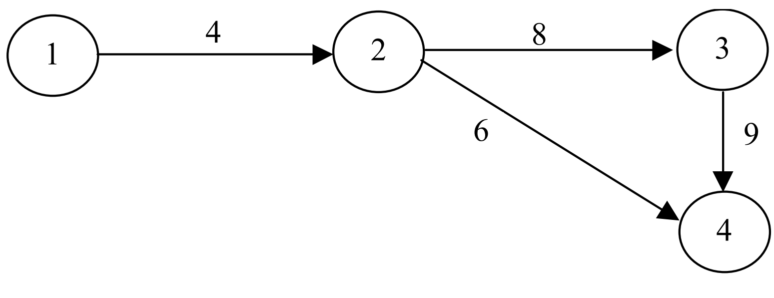



Σε κάθε δίκτυο έχουμε τον **αρχικό** και τον **τελικό** κόμβο.

**Ορισμός**

Μία **διαδικασία** λέγεται **κρίσιμη** αν κάποια καθυστέρηση περάτωσής της προκαλεί την ίδια καθυστέρηση στην επόμενη διαδικασία.

**Παράδειγμα 4.7**




Η 1 είναι κρίσιμη για τις 2 , 3 , 4 κ.λπ.

**Ορισμός**

**Κρίσιμο μονοπάτι** είναι εκείνο που διατρέχει αποκλειστικά κρίσιμους κόμβους.

Σε κάθε πρότζεκτ υπάρχει τουλάχιστον ένα κρίσιμο μονοπάτι που προσδιορίζει τη διάρκειά του. Ο **αλγόριθμος CPM** (Critical Path Method) δίνει τον τρόπο εύρεσης του κρίσιμου μονοπατιού.

Υποθέσεις - Συμβολισμοί:

1. Δύο κόμβοι συνδέονται με το πολύ ένα τόξο.
2. Οι αριθμοί των κόμβων είναι μοναδικοί.
3. Υπάρχει μόνον ένας αρχικός και ένας τελικός κόμβος.
4. $t_{ij}$ : διάρκεια από κόμβο $i$ σε κόμβο $j$

   $E_i$ : ενωρίτερος χρόνος έναρξης της διαδικασίας $i$

   $L_i$ : αργότερος χρόνος έναρξης της διαδικασίας $i$

   $S_{ij}$ : διαφορά χρόνων για $(i,j)$

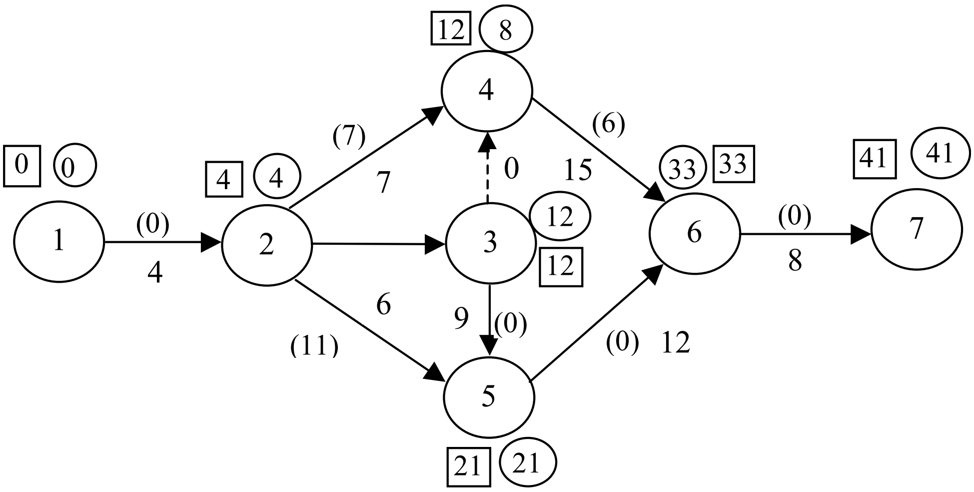
**Ο αλγόριθμος CPM**

1. Θέσετε τον ενωρίτερο χρόνο για τον αρχικό κόμβο $E_1 = 0$.
2. Υπολογίσετε τον ενωρίτερο χρόνο έναρξης από: $E_j = \max\{E_{i_1} + t_{i_1,j}, ..., E_{i_u} + t_{i_u,j}\}$,

   $j > 1$ όπου $i_1,...,i_u$ συμβολίζουν διαδικασίες που προηγούνται του $j$.
3. Θέσετε τον αργότερο χρόνο του τελικού κόμβου ίσο με τον ενωρίτερο χρόνο του $E_n = L_n$.
4. Υπολογίσετε τον αργότερο χρόνο έναρξης από: $L_j = \min\{L_{i1} - t_{i1,j}, ..., L_{iv} + t_{iv,j}\}$, $j < n$ όπου $i_1$, ..., $i_v$ είναι τελικοί κόμβοι όλων των τόξων που ξεκινούν από τον κόμβο $j$, και συμβολίζουν τις διαδικασίες που ακολουθούν αμέσως μετά την $j$
5. Υπολογίσετε τη διαφορά για το $(i, j)$ από: $S_{ij} = L_j - E_i - t_{ij}$.

   Προσδιορίστε το μονοπάτι όπου $S_{ij} = 0$. Αυτό είναι το κρίσιμο μονοπάτι.

**Παράδειγμα 4.8**




Το πρότζεκτ είναι:

| Διαδικασία | Διάρκεια | Άμεσος Προκάτοχος |
|---|---|---|
| (1,2) | 4 | _ |
| (2,4) | 7 | (1,2) |
| (2,3) | 8 | (1,2) |
| (2,5) | 6 | (1,2) |
| (4,6) | 15 | (2,4), (2,3) |
| (3,5) | 9 | (2,3) |
| (5,6) | 12 | (2,5), (3,5) |
| (6,7) | 8 | (4,6), (5,6) |

$E_1 = 0$

$E_2 = E_1 + t_{12} = 0 + 4 = 4$

$E_3 = E_2 + t_{23} = 4 + 8 = 12$

$E_4 = \max\{E_2 + t_{24}, E_3 + t_{34}\} = \max\{4 + 7, 12 + 0\} = 12.$

Το ψεύτικο τόξο (3,4) με διάρκεια 0, χρειάζεται για να δείξει ότι η διαδικασία (4,6) εξαρτάται απο την (2,3), αφού η (2,3) προηγείται. Παρόμοια $E_5 = 21$, $E_6 = 33$, $E_7 = 41$. Αυτούς τους αριθμούς βάζουμε σε τετράγωνα στους κόμβους. Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο αντίστροφα.

$L_7 = E_7 = 41,$

$L_6 = L_7 - t_{67} = 41 - 8 = 33,$

$L_5 = L_6 - t_{56} = 33 - 12 = 21$,

$L_4 = L_6 - t_{46} = 33 - 15 = 18$,

$L_3 = \min\{L_4 - t_{34}, L_5 - t_{35}\} = \min\{18 - 0, 21 - 9\} = 12$,

$L_2 = 4$.

Αυτούς τους αριθμούς τους βάζουμε σε κύκλους. Τώρα υπολογίζουμε τη διαφορά.

$S_{67} = L_7 - E_6 - t_{67} = 41 - 33 - 8 = 0$,

$S_{46} = L_6 - E_4 - t_{46} = 33 - 12 - 15 = 6$.

Παρόμοια $S_{56} = 0$, $S_{35} = 0$, $S_{25} = 11$, $S_{24} = 7$, $S_{12} = 0$. Αυτούς τους αριθμούς τους βάζουμε σε παρένθεση. Το κρίσιμο μονοπάτι είναι:

$$\{(1,2),(2,3),(3,5),(5,6),(6,7)\}.$$

## 4.8 Προγραμματισμός με απαιτούμενη διαδοχή εργασιών

Επιστρέφουμε στο πρόβλημα $n|1$, μόνο που τώρα υπάρχουν μερικές εργασίες που πρέπει να ακολουθήσουν κάποια τεχνολογική διαδοχή, ή που ακολουθούνται από αυστηρά καθορισμένες εργασίες, αλλιώς ο χρόνος προετοιμασίας θα αυξηθεί υπερβολικά. Έστω ότι οι $n$ εργασίες έχουν ομαδοποιηθεί σε $\kappa$ ομάδες με συγκεκριμένη διαδοχή. Έστω:

$P_{ij}$ : ο χρόνος επεξεργασίας της εργασίας $j$ στην ομάδα $i$.

$F_{ij}$ : ο αντίστοιχος χρόνος ροής.

$P_i = \sum_{j=1}^{n_i} P_{ij}$ : ο συνολικός χρόνος επεξεργασίας της ομάδας $i$.

$n_i$ : ο αριθμός εργασιών στην ομάδα $i$.

$F_i' = F_{i,n_i}$ : ο χρόνος ροής της ομάδας $i$ που ισούται με το χρόνο ροής της τελευταίας εργασίας της ομάδας.

Έστω τώρα ότι θέλουμε τη βέλτιστη ακολουθία, έτσι ώστε $\overline{F}' = \frac{1}{\kappa}\sum_{i=1}^{\kappa} F_i'$, ο μέσος χρόνος ροής των ομάδων, να είναι ελάχιστος. Αυτή η ακολουθία είναι:

$$P'[1] \le P'[2] \le \ldots \le P'[\kappa].$$

**Παράδειγμα 4.9**

| Εργασία | Χρόνοι Επεξεργασίας | Ομάδα | Χρόνοι Επεξεργασίας | $n_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | (2,4) | 23 | 2 |
| 2 | 8 | (5,1,3) | 10 | 3 |
| 3 | 2 | (6) | 4 | 1 |
| 4 | 15 | | | |
| 5 | 3 | | | |
| 6 | 4 | | | |

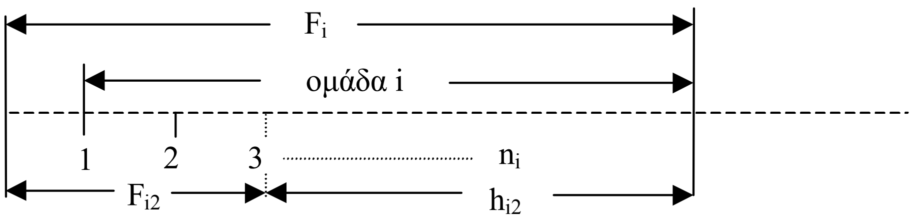
Η ακολουθία $n|1|\overline{F}'$ είναι $\{6, 5, 1, 3, 2, 4\}$.

Αν όμως θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε τον αρχικό μέσον όρο ροής: $\overline{F} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F_i$ , τότε ισχύει το ακόλουθο:

**Θεώρημα**

Η λύση του προβλήματος $n|1|F$ είναι: $\frac{P'[1]}{n[1]} \leq \frac{P'[2]}{n[2]} \leq \ldots \leq \frac{P'[\kappa]}{n[\kappa]}$ .

*Απόδειξη*




Έστωσαν $h_{ij}$ οι χρόνοι ανάμεσα στη συμπλήρωση της εργασίας $j$ της $i$ ομάδας και στη συμπλήρωση της ομάδας. Προφανώς:

$$h_{i\,n_i} = 0.$$

Επίσης

$$h_{ij} = \sum_{\kappa=j+1}^{n_i} P_{i\kappa} \ , j = 1,2,\ldots, n_i - 1.$$

Τώρα $F_{ij} = F_i' - h_{ij}$ και

$$\overline{F} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\kappa}\sum_{j=1}^{n_i} F_{ij} = \frac{1}{n}\left[\left(F_{11} + F_{12} + \ldots + F_{1n_1}\right) + \left(F_{21} + \ldots + F_{2n_2}\right) + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\left(\underbrace{F_1 + \ldots + F_1}_{n_1 \text{ φορές}} - h_1 - \ldots - h_{n_1}\right) + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i F_i' - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\kappa}\sum_{j=1}^{n_i} h_{ij} \, .$$

Αλλά τα $h_{ij}$ είναι δεδομένα και άρα ελαχιστοποιούμε το

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i F_i' \, ,$$

το οποίο είναι $n\,|\,1\,|\,\overline{F}'$ πρόβλημα με βάρη και η λύση του είναι αυτή του θεωρήματος.

**Παράδειγμα 4.10**

Θεωρούμε το παράδειγμα 4.9

| $i$ | $n_i$ | $P_i \,/\, n_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 11.5 |
| 2 | 3 | 3.33 |
| 3 | 1 | 4 |

και η ακολουθία είναι {2, 3, 1} = {5, 1, 3, 6, 2, 4}.

**Ορισμός**

**Διαφορά χρόνου** (περιθώριο, slack) μιας εργασίας $i$ με χρόνο κατεργασίας $P_i$ και ημερομηνία παράδοσης $d_i$, είναι η ποσότητα $d_i - P_i$.

Η εργασία με τη μικρότερη διαφορά χρόνου είναι πιθανώς η πιο επικίνδυνη για να αργήσει. Ίσως τότε αν της δινόταν προτεραιότητα, αυτός ο κίνδυνος να γινόταν ελάχιστος. Θα προγραμματίσουμε τις εργασίες

$$d[1] - P[1] \le d[2] - P[2] \le \ldots \le d[n] - P[n] \, .$$

Το ακόλουθο θεώρημα μας δείχνει πως η διαίσθηση μπορεί να αποτύχει παταγωδώς:

**Θεώρημα**

Η ακολουθία των αυξανόμενων διαφορών μεγιστοποιεί την ελάχιστη βραδύτητα και την ελάχιστη καθυστέρηση εργασιών για το πρόβλημα $n|1$.

# V ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

**1.** Κάποιο προϊόν παράγεται σε δόσεις των 20000 μονάδων. Η μηχανή που το παράγει έχει ρυθμό παραγωγής 400000 μονάδων / έτος και το προϊόν προστίθεται στο απόθεμα συνεχώς καθώς η μηχανή παράγει. Η ζήτηση είναι 160000 μονάδες / έτος. Η παραγωγή δεν αρχίζει πριν οι ανικανοποίητες παραγγελίες φθάσουν τις 4000. Το κόστος προετοιμασίας των εγκαταστάσεων είναι 400, το κόστος ανά μονάδα είναι 20, ο ρυθμός κόστους είναι 20% ετησίως, και το κόστος ανικανοποίητων παραγγελιών είναι 5 ανά μονάδα, ανά έτος. Εύρετε:

α. Μέγιστο απόθεμα.

β. Ετήσιο κόστος αποθέματος.

γ. Ετήσιο κόστος ανικανοποίητων παραγγελιών.

δ. Ετήσιο κόστος προετοιμασίας.

ε. Ποσοστό χρόνου που το σύστημα ευρίσκεται σε αρνητικό απόθεμα.

**2.** Ένα εμπορικό κατάστημα αγοράζει κάποιο είδος για μεταπώληση με τα εξής δεδομένα:

Ετήσιος ρυθμός ζήτησης : 100000 μονάδες.

Σταθερό κόστος παραγγελίας : 40.

Μεταβλητό μοναδιαίο κόστος : 10.

Ρυθμός κόστους αποθέματος / έτος : 0.2.

Ετήσιο κόστος ανικανοποίητων παραγγελιών : 2 / μονάδα.

Όλη η παραγγελία έρχεται με μία εκφόρτωση. Εύρετε:

α. Το βέλτιστο μέγεθος παραγγελίας;

β. Αν ο χρόνος άφιξης παραγγελίας είναι 1 μήνας ποιό είναι το σημείο παραγγελίας;

γ. Το μέσο και μέγιστο απόθεμα;

δ. Το μέσο και μέγιστο μέγεθος ανικανοποίητων παραγγελιών;

**3.** Στην τάξη έχουμε μεταχειρισθεί τη ζήτηση σαν συνεχή μεταβλητή, ενώ στην πράξη είναι διακεκριμένη μεταβλητή. Για $D$ >> αυτή η προσέγγιση είναι ικανοποιητική αλλά για μικρό $D$ δεν μπορούμε να παίρνουμε παραγώγους αλλά διαφορές $\Delta K(Q) = K(Q+1) - K(Q)$. Για να είναι το $Q^*$ ελάχιστο, τότε πρέπει: $\Delta K(Q^*) \geq 0$ και $\Delta K(Q^*-1) \leq 0$.

Δείξετε ότι αν $b = 0$, $p \to \infty$, τότε το $Q^*$ είναι ο μεγαλύτερος αριθμός που ικανοποιεί $Q(Q-1) < \dfrac{2AD}{iC}$.

**4.** Πρόκειται να αποθηκεύσουμε $n$ είδη για τα οποία το σταθερό κόστος παραγγελίας είναι 0. Η ζήτηση είναι σταθερή $D_j$ μονάδες / έτος για το είδος $j$ με αντίστοιχο κόστος $C_j$ και κόστος αποθέματος $i$ για όλα τα είδη. Υπάρχει ένα άνω όριο $N$ στον αριθμό παραγγελιών ανά έτος. Αποδείξετε ότι υπάρχει λύση κλειστής μορφής γι' αυτό το πρόβλημα για την εύρεση των πολλαπλασιαστών Lagrange και των βέλτιστων μεγεθών παραγγελίας. Ποια είναι η ερμηνεία των πολλαπλασιαστών; Υπάρχει λύση κλειστής μορφής αν υπάρχει σταθερό κόστος $A_j$;

**5.** Ο ρυθμός ζήτησης για κάποιο είδος για τον επόμενο χρόνο είναι $200 + 1600\, t$, $0 \leq t \leq 1$. Το σταθερό κόστος παραγγελίας είναι 200 ανά παραγγελία, το κάθε είδος κοστίζει 10/μονάδα, και ο ρυθμός κόστος αποθέματος είναι 20% ετησίως. Το αρχικό απόθεμα είναι 100 μονάδες. Αν $b = 0$ ποιά είναι η βέλτιστη πολιτική για τον επόμενο χρόνο;

**6.** Κάποια πρώτη ύλη έχει ζήτηση 180000 μονάδες / έτος. Το σταθερό κόστος παραγγελίας είναι 60/παραγγελία. $i = 20\%$. Ανικανοποίητες παραγγελίες δεν επιτρέπονται. Τα ακόλουθα δεδομένα ισχύουν:

| Ποσότητα | Τιμή |
|---|---|
| $0 < Q < 6000$ | 1.7 |
| $6000 \leq Q < 10000$ | 1.6 |
| $10000 \leq Q < \infty$ | 1.5 |

Ποιά είναι η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας; Κάνετε το διάγραμμα κόστους ως προς την ποσότητα παραγγελίας.

**7.** Αποδείξετε τη σχέση (3.8).

**8.** Αποδείξετε τη σχέση (3.9).

**9.** Μία διαδικασία έχει τη μορφή $x(t) = 10\mathrm{a}e^{-0.356\,t}$. Έχουμε τις εξής μετρήσεις:

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $x(t)$ | 167.9 | 95.5 | 88.8 | 55.3 |

Εύρετε την εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων του a.

**10.** Εύρετε τη μέση βραδύτητα αν οι ακόλουθες εργασίες προγραμματιστούν με αυξανόμενο χρόνο επεξεργασίας

| Εργασία | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P_i$ | 8 | 7 | 6 | 4 | 10 |
| $d_i$ | 10 | 15 | 24 | 28 | 23 |

Υπάρχει άλλη ακολουθία με μικρότερη $\overline{L}$;

**11.** Αποδείξετε ότι για το πρόβλημα $n|1$ η ακολουθία αυξανόμενων χρόνων επεξεργασίας ελαχιστοποιούν το $\overline{L}$.

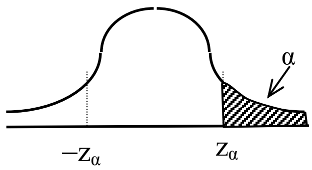
**12.** Θεωρήσετε το πρόβλημα $n|2|F$ και τα δεδομένα

| | Χρόνοι Επεξεργασίας | | Ημερομηνία |
|---|---|---|---|
| Εργασία | $M_1$ | $M_2$ | Παράδοσης |
| 1 | 1 | 3 | 5 |
| 2 | 2 | 5 | 12 |
| 3 | 4 | 1 | 16 |
| 4 | 3 | 2 | 20 |
| 5 | 6 | 4 | 25 |

Εύρετε τη βέλτιστη ακολουθία $\overline{L}$, $L_{\max}$. Υπάρχει άλλη ακολουθία με μικρότερη $L_{\max}$;

# VI ΠΙΝΑΚΑΣ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Τιμές $z_α$ που αντιστοιχούν σε πιθανότητα $P(Z \geq z_α) = α$.




| | _._0 | _._1 | _._2 | _._3 | _._4 | _._5 | _._6 | _._7 | _._8 | _._9 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0.0_** | **0.5000** | **0.4960** | **0.4920** | **0.4880** | **0.4840** | **0.4801** | **0.4761** | **0.4721** | **0.4681** | **0.4641** | **0.0_** |
| **0.1_** | **0.4602** | **0.4562** | **0.4522** | **0.4483** | **0.4443** | **0.4404** | **0.4364** | **0.4325** | **0.4286** | **0.4247** | **0.1_** |
| **0.2_** | **0.4207** | **0.4168** | **0.4129** | **0.4090** | **0.4052** | **0.4013** | **0.3974** | **0.3936** | **0.3897** | **0.3859** | **0.2_** |
| **0.3_** | **0.3821** | **0.3783** | **0.3745** | **0.3707** | **0.3669** | **0.3632** | **0.3594** | **0.3557** | **0.3520** | **0.3483** | **0.3_** |
| **0.4_** | **0.3446** | **0.3409** | **0.3372** | **0.3336** | **0.3300** | **0.3264** | **0.3228** | **0.3192** | **0.3156** | **0.3121** | **0.4_** |
| **0.5_** | **0.3085** | **0.3050** | **0.3015** | **0.2981** | **0.2946** | **0.2912** | **0.2877** | **0.2843** | **0.2810** | **0.2776** | **0.5_** |
| **0.6_** | **0.2743** | **0.2709** | **0.2676** | **0.2643** | **0.2611** | **0.2578** | **0.2546** | **0.2514** | **0.2483** | **0.2451** | **0.6_** |
| **0.7_** | **0.2420** | **0.2389** | **0.2358** | **0.2327** | **0.2296** | **0.2266** | **0.2236** | **0.2206** | **0.2177** | **0.2148** | **0.7_** |
| **0.8_** | **0.2119** | **0.2090** | **0.2061** | **0.2033** | **0.2005** | **0.1977** | **0.1949** | **0.1922** | **0.1894** | **0.1867** | **0.8_** |
| **0.9_** | **0.1841** | **0.1814** | **0.1788** | **0.1762** | **0.1736** | **0.1711** | **0.1685** | **0.1660** | **0.1635** | **0.1611** | **0.9_** |
| **1.0_** | **0.1587** | **0.1562** | **0.1539** | **0.1515** | **0.1492** | **0.1469** | **0.1446** | **0.1423** | **0.1401** | **0.1379** | **1.0_** |
| **1.1_** | **0.1357** | **0.1335** | **0.1314** | **0.1292** | **0.1271** | **0.1251** | **0.1230** | **0.1210** | **0.1190** | **0.1170** | **1.1_** |
| **1.2_** | **0.1151** | **0.1131** | **0.1112** | **0.1093** | **0.1075** | **0.1056** | **0.1038** | **0.1020** | **0.1003** | **0.0985** | **1.2_** |
| **1.3_** | **0.0968** | **0.0951** | **0.0934** | **0.0918** | **0.0901** | **0.0885** | **0.0869** | **0.0853** | **0.0838** | **0.0823** | **1.3_** |
| **1.4_** | **0.0808** | **0.0793** | **0.0778** | **0.0764** | **0.0749** | **0.0735** | **0.0721** | **0.0708** | **0.0694** | **0.0681** | **1.4_** |
| **1.5_** | **0.0668** | **0.0655** | **0.0643** | **0.0630** | **0.0618** | **0.0606** | **0.0594** | **0.0582** | **0.0571** | **0.0559** | **1.5_** |
| **1.6_** | **0.0548** | **0.0537** | **0.0526** | **0.0516** | **0.0505** | **0.0495** | **0.0485** | **0.0475** | **0.0465** | **0.0455** | **1.6_** |
| **1.7_** | **0.0446** | **0.0436** | **0.0427** | **0.0418** | **0.0409** | **0.0401** | **0.0392** | **0.0384** | **0.0375** | **0.0367** | **1.7_** |
| **1.8_** | **0.0359** | **0.0351** | **0.0344** | **0.0336** | **0.0329** | **0.0322** | **0.0314** | **0.0307** | **0.0301** | **0.0294** | **1.8_** |
| **1.9_** | **0.0287** | **0.0281** | **0.0274** | **0.0268** | **0.0262** | **0.0256** | **0.0250** | **0.0244** | **0.0239** | **0.0233** | **1.9_** |
| **2.0_** | **0.0228** | **0.0222** | **0.0217** | **0.0212** | **0.0207** | **0.0202** | **0.0197** | **0.0192** | **0.0188** | **0.0183** | **2.0_** |
| **2.1_** | **0.0179** | **0.0174** | **0.0170** | **0.0166** | **0.0162** | **0.0158** | **0.0154** | **0.0150** | **0.0146** | **0.0143** | **2.1_** |
| **2.2_** | **0.0139** | **0.0136** | **0.0132** | **0.0129** | **0.0125** | **0.0122** | **0.0119** | **0.0116** | **0.0113** | **0.0110** | **2.2_** |
| **2.3_** | **0.0107** | **0.0104** | **0.0102** | **0.0099** | **0.0096** | **0.0094** | **0.0091** | **0.0089** | **0.0087** | **0.0084** | **2.3_** |
| **2.4_** | **0.0082** | **0.0080** | **0.0078** | **0.0075** | **0.0073** | **0.0071** | **0.0069** | **0.0068** | **0.0066** | **0.0064** | **2.4_** |
| **2.5_** | **0.0062** | **0.0060** | **0.0059** | **0.0057** | **0.0055** | **0.0054** | **0.0052** | **0.0051** | **0.0049** | **0.0048** | **2.5_** |
| **2.6_** | **0.0047** | **0.0045** | **0.0044** | **0.0043** | **0.0041** | **0.0040** | **0.0039** | **0.0038** | **0.0037** | **0.0036** | **2.6_** |
| **2.7_** | **0.0035** | **0.0034** | **0.0033** | **0.0032** | **0.0031** | **0.0030** | **0.0029** | **0.0028** | **0.0027** | **0.0026** | **2.7_** |
| **2.8_** | **0.0026** | **0.0025** | **0.0024** | **0.0023** | **0.0023** | **0.0022** | **0.0021** | **0.0021** | **0.0020** | **0.0019** | **2.8_** |
| **2.9_** | **0.0019** | **0.0018** | **0.0018** | **0.0017** | **0.0016** | **0.0016** | **0.0015** | **0.0015** | **0.0014** | **0.0014** | **2.9_** |
| **3.0_** | **0.0013** | **0.0013** | **0.0013** | **0.0012** | **0.0012** | **0.0011** | **0.0011** | **0.0011** | **0.0010** | **0.0010** | **3.0_** |
| **3.1_** | **0.0010** | **0.0009** | **0.0009** | **0.0009** | **0.0008** | **0.0008** | **0.0008** | **0.0008** | **0.0007** | **0.0007** | **3.1_** |
| **3.2_** | **0.0007** | **0.0007** | **0.0006** | **0.0006** | **0.0006** | **0.0006** | **0.0006** | **0.0005** | **0.0005** | **0.0005** | **3.2_** |
| **3.3_** | **0.0005** | **0.0005** | **0.0005** | **0.0004** | **0.0004** | **0.0004** | **0.0004** | **0.0004** | **0.0004** | **0.0003** | **3.3_** |
| **3.4_** | **0.0003** | **0.0003** | **0.0003** | **0.0003** | **0.0003** | **0.0003** | **0.0003** | **0.0003** | **0.0003** | **0.0002** | **3.4_** |
| **3.5_** | **0.0002** | **0.0002** | **0.0002** | **0.0002** | **0.0002** | **0.0002** | **0.0002** | **0.0002** | **0.0002** | **0.0002** | **3.5_** |
| **3.6_** | **0.0002** | **0.0002** | **0.0001** | **0.0001** | **0.0001** | **0.0001** | **0.0001** | **0.0001** | **0.0001** | **0.0001** | **3.6_** |
| **3.7_** | **0.0001** | **0.0001** | **0.0001** | **0.0001** | **0.0001** | **0.0001** | **0.0001** | **0.0001** | **0.0001** | **0.0001** | **3.7_** |
| **3.8_** | **0.0001** | **0.0001** | **0.0001** | **0.0001** | **0.0001** | **0.0001** | **0.0001** | **0.0001** | **0.0001** | **0.0001** | **3.8_** |
| **3.9_** | **0.00005** | **0.00005** | **0.00004** | **0.00004** | **0.00004** | **0.00004** | **0.00004** | **0.00004** | **0.00003** | **0.00003** | **3.9_** |
| **4.0_** | **0.000032** | | | | | | | | | | |

<u>Παράδειγμα 1.</u> Αν $F(z) = P(Z \leq z) = 0.90$, τότε $P(Z \geq z) = 0.10$. Από τον πίνακα , το πλησιέστερο στοιχείο είναι το 0.1003 που αντιστοιχεί στη γραμμή 1.2_ και στήλη _._8. Άρα $z = 1.28$. Μπορούμε να κάνουμε γραμμική παρεμβολή του 0.10 στα γειτονικά στοιχεία 0.1003 και 0.0985. Το τελικό z θα είναι πιο ακριβές αλλά η διαφορά του από το 1.28 είναι πρακτικά αμελητέα.

<u>Παράδειγμα 2.</u> Αν $F(z) = 0.14 < 0.5$, τότε το σημείο z είναι αρνητικό και συμμετρικό με το σημείο $z_α$ για το οποίο $P(Z \geq z_α) = 0.14$. Το πλησιέστερο στοιχείο του πίνακα είναι το 0.1401 με $z_α = 1.08$. Συνεπώς $z = -1.08$.

# VII ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] L. A. Jonson and D. C. Montgomery, *Operations Research in Production Planning, Scheduling, and Inventory Control*, Wiley, 1974.

[2] R. W. Conway, W. L. Maxwell, and L. W. Miller, *Theory of Scheduling*, Addison-Wesley Publishing Coompany, 1967.

[3] K. R. Baker, *Introduction to Sequencing and Scheduling*, Wiley, 1974.

[4] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya, *Inequalities*, Cambridge University Press, 1988.

[5] J. D. C. Little, K. G. Sweeney, and C. Karel, "An algorithm for the traveling salesman problem," *Operations Research*, vol. 11, no. 6, 1963.