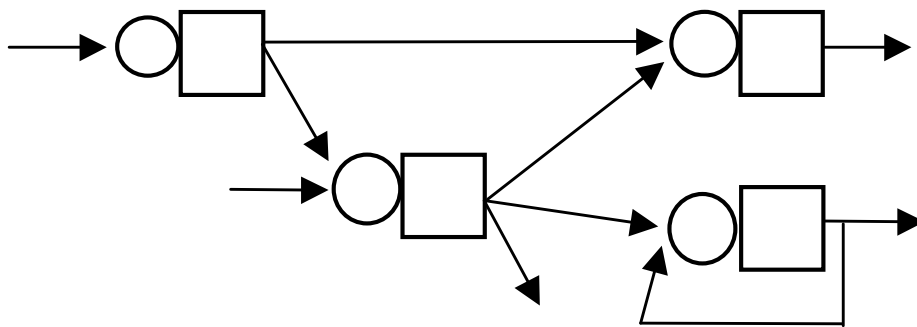

ΔΙΚΤΥΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

C.A.M.

Αναμονητικά Συστήματα, Γραμμές Παραγωγής, F.M.S.

Γιάννης Α. Φίλης

Ιανουάριος 2003



Πολυτεχνείο Κρήτης

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	3
2	ΟΥΡΕΣ Η ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ.....	6
2.1	Μοντέλα Γέννησης – Θανάτου	6
2.2	Μερικές Βασικές Ιδέες Αναμονητικών Συστημάτων.....	13
2.3	Αφίξεις με Αποθάρρυνση.....	17
2.4	Το Σύστημα $M/M/\infty$	19
2.5	Το Σύστημα $M/M/m$	20
2.6	Το Σύστημα $M/M/1/K$	21
2.7	Το Σύστημα $M/M/m/m$	23
2.8	Το Σύστημα $M/M/1/\infty/M$	24
2.9	Το σύστημα $M/M/\infty/\infty/M$	25
2.10	Το Σύστημα $M/M/m/K/M$	26
3	ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΑΡΚΟΝ ΟΠΟΥ ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΓΕΝΝΗΣΗΣ-ΘΑΝΑΤΟΥ ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ	28
3.1	Η Κατανομή Erlang E_n	28
3.2	Ο Μετασχηματισμός z	32
3.3	Η Ουρά $M/E_n/1$	39
3.4	Η Ουρά $E_n/M/1$	42
3.5	Ομαδικές Αφίξεις	45
3.6	Ομαδικές εξυπηρετήσεις	47
3.7	Δίκτυα Αναμονητικών Συστημάτων	49
4	ΓΕΝΙΚΟΤΕΡΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ.....	53
4.1	Το Σύστημα $M/G/1$	53
4.2	Γενικότερα Μοντέλα	57
4.2.1	Το μοντέλο $M/G/\infty$	58

4.2.2	Το μοντέλο $G/G/1$	61
4.2.3	Το σύστημα $G/G/m$	62
5	ΕΝΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΓΡΑΜΜΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ	64
6	ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΕΥΕΛΙΚΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ (FMS).....	72
6.1	Εισαγωγή.....	72
6.2	Προβλήματα FMS.....	75
6.3	Ένα μοντέλο FMS.....	76
7	ΑΣΚΗΣΕΙΣ.....	81
8	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	86

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αρχίζουμε με μερικούς βασικούς ορισμούς που αφορούν τα συστήματα παραγωγής.

- **Σταθμοί παραγωγής (workstations)** είναι συνήθως μηχανές συνδεδεμένες εν παραλλήλω και εργαζόμενοι σ' αυτές που δέχονται πρώτες ύλες ή ανεπεξέργαστα κομμάτια και παράγουν επεξεργασμένα είδη.
- **Σύστημα παραγωγής (production system)** είναι δίκτυο σταθμών παραγωγής.
- **Γραμμή παραγωγής (production line)** συνίσταται από μηχανές ή σταθμούς παραγωγής συνδεδεμένους εν σειρά.
- Ένα **δίκτυο παραγωγής (production network)** περιέχει σταθμούς παραγωγής με αυθαίρετες διασυνδέσεις.

Για ν' αυξήσουμε την παραγωγικότητα ενός δικτύου παραγωγής τοποθετούμε ανάμεσα σε διαδοχικούς σταθμούς χώρους **εναποθήκευσης (buffers)**, οι οποίοι διατηρούν αποθέματα υλικών προς επεξεργασία από τους επόμενους σταθμούς παραγωγής.

Το κεντρικό πρόβλημα των δικτύων παραγωγής είναι αυτό της **ανάλυσης και σύνθεσης**. Με την ανάλυση αναπτύσσουμε τη μεθοδολογία εκείνη βάσει της οποίας υπολογίζουμε μέσους ρυθμούς παραγωγής του συστήματος, μέση στάθμη χώρων εναποθήκευσης κλπ.

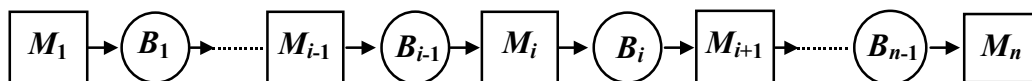
Με τη σύνθεση υπολογίζουμε το βέλτιστο μέγεθος χώρων εναποθήκευσης όταν λαμβάνουμε υπ' όψιν την αύξηση της παραγωγικότητας αλλά και το κόστος αποθέματος, τη βέλτιστη κατανομή επισκευαστικών πόρων κλπ.

Θα πρέπει να τονισθεί ότι το πρόβλημα της ανάλυσης και σύνθεσης είναι εξαιρετικά δύσκολο λόγω του τεράστιου αριθμού των διαστάσεων και των υπερβολικών υπολογιστικών απαιτήσεων. Η πολυπλοκότητα του προβλήματος σε συνδυασμό με την τυχαιότητα των διακεκριμένων γεγονότων (μηχανές σπάζουν ή επισκευάζονται, χώροι εναποθήκευσης γεμίζουν ή αδειάζουν) το κάνουν ιδιαίτερα ελκυστικό και ενδιαφέρον. Σε μια εποχή εύθραυστων οικονομιών, μειωμένης

παραγωγικότητας, και συνεχώς αυξανόμενης αυτοματοποίησης η λύση τέτοιων προβλημάτων θα μπορούσε να θεωρηθεί πολύ σημαντική. Εντούτοις, πρέπει να γίνει κατανοητό ότι η «σύνθεση» εννοείται με μια πολύ στενή σημασία, όπως συνήθως συμβαίνει με πολλά προβλήματα μηχανικών. Για παράδειγμα, η γεωμετρία ή η τοπολογία του δικτύου επηρεάζει την παραγωγικότητα. Ακόμη πιο σημαντικό, θα πρέπει κανείς να λάβει υπ' όψιν του τις κοινωνικές, οικονομικές, και οικολογικές επιδράσεις του συστήματος παραγωγής. Ένα εξαιρετικά αυτοματοποιημένο εργοστάσιο μπορεί να συνεπάγεται απολύσεις εργατών που πιθανόν να είναι ανεπιθύμητες. Ένα ρυπογόνο εργοστάσιο μπορεί να καταστρέψει το άμεσο ή έμμεσο περιβάλλον του ή ισοδύναμα το βιολογικό του κεφάλαιο. Το πρόβλημα επομένως γίνεται ένα πολύπλοκο πρόβλημα συστημάτων.

Αν το πρόβλημα δεν συνδεθεί με τα αντίστοιχα οικονομικά, κοινωνικά, και οικολογικά προβλήματα, τότε δεν πρόκειται παρά για μια στεγνή άσκηση μηχανικών σαν τόσες άλλες που βασικά είναι υπεύθυνες για πολλά προβλήματα του πλανήτη μας.

Ας θεωρήσουμε τη γραμμή παραγωγής του σχήματος. Έστω ότι κάθε μηχανή παράγει με ρυθμό παραγωγής i_j , $j=1,2,\dots,n$ και η χωρητικότητα κάθε χώρου εναποθήκευσης είναι N_j . Κάθε μηχανή παράγει ένα προϊόν σ' έναν κύκλο παραγωγής με πιθανότητα p_j και αν είναι χαλασμένη, επισκευάζεται στον ίδιο χρόνο με πιθανότητα r_j .

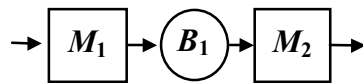


Σχήμα 1.1. Γραμμή παραγωγής

Για να υπολογίσουμε τη μέση παραγωγή της γραμμής και τη μέση στάθμη των χώρων εναποθήκευσης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις αλυσίδες Markov που είναι ακριβή μοντέλα. Η κατάσταση της αλυσίδας περιγράφεται από τις καταστάσεις των μηχανών (0 ή 1) και τον αριθμό των κομματιών (0, 1, 2,...) που ευρίσκονται μεταξύ δύο διαδοχικών μηχανών κάποια χρονική στιγμή.

Στη στοιχειώδη γραμμή του Σχήματος 2.1, αν η χωρητικότητα της αποθήκης είναι

$N_1 = 0$, τότε στο σύστημα μπορεί να υπάρχουν 0, 1, ή 2 κομμάτια. Ως τέτοια υπολογίζονται όσα έχουν τελειώσει την κατεργασία τους από την M_1 και αναμένουν ή υφίστανται κατεργασία στην M_2 . Για παράδειγμα, στο σύστημα υπάρχουν δύο κομμάτια όταν η M_2 κατεργάζεται ένα κομμάτι, η αποθήκη έχει 0 κομμάτια, και υπάρχει ένα ακόμη κομμάτι αποκλεισμένο στην έξοδο της M_1 το οποίο έχει τελειώσει την κατεργασία του στην μηχανή και περιμένει να περάσει στην M_2 .



Σχήμα 1.2. Στοιχειώδης γραμμή

Έχουμε τις εξής καταστάσεις με τη σύμβαση $(M_1B_1M_2)$

$$\begin{array}{cccc} (0,0,0), & (1,0,0), & (1,0,1), & (0,0,1) \\ (0,1,0), & (1,1,0), & (1,1,1), & (0,1,1) \\ (0,2,0), & (1,2,0), & (1,2,1), & (0,2,1) \end{array}$$

δηλαδή συνολικά 12 καταστάσεις και άρα 12 διαφορεικές εξισώσεις να λύσουμε. Ακόμη και στη μόνιμη κατάσταση το σύστημα γίνεται πολύπλοκο. Εν γένει, σε ένα δίκτυο παραγωγής με n μηχανές και m αποθήκες έχουμε $2^n \prod_{j=1}^m (N_j + 3)$ καταστάσεις. Για παράδειγμα, για μία γραμμή με $n = 20$, $m = 19$, $N_j = 20$ που είναι μια ρεαλιστική περίπτωση έχουμε περίπου 7.8×10^{31} καταστάσεις! Ο υπολογιστής που θ' αναλάβει να λύσει αυτό το πρόβλημα χρειάζεται 10^{32} msec αν υποθέσουμε (τελείως υπεραισιόδοξα) ότι κάθε διαφορεική εξίσωση παίρνει 10 msec χρόνου CPU, ή περίπου 3×10^{18} έτη! Ο υπολογιστής που θα λύσει το πρόβλημά μας δεν θα εφευρεθεί στα προσεχή 50 χρόνια γι' αυτό πρέπει να στραφούμε σε άλλες μεθόδους.

Η μέθοδος Markov είναι καλή για προβλήματα μικρών διαστάσεων και τέτοια υπάρχουν στην πράξη. Για μεγαλύτερα, πρέπει να επινοήσουμε άλλες μεθόδους.

Στο μεταξύ χρειαζόμαστε μια κάπως λεπτομερή εξέταση συστημάτων αναμονής και διαδικασιών Markov.

2 ΟΥΡΕΣ Η ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

(Queueing Systems)

2.1 Μοντέλα Γέννησης – Θανάτου

(Birth-death models)

Αρχίζουμε με μια αλυσίδα Markov $\{X_t, t \geq 0\}$. Ορίζουμε

$$P_{jk}(\tau, t) \triangleq P(X_t = k | X_\tau = j) \quad (2.1.1)$$

Η πιθανότητα P_{jk} λέγεται **συνάρτηση πιθανότητας μετάβασης**.

Θεωρούμε τώρα τις χρονικές στιγμές $n > l > m \geq 0$ και τις καταστάσεις j και k .

Προφανώς

$$\begin{aligned} P_{jk}(m, n) &= P(X_n = k | X_m = j) = \frac{P(X_n = k, X_m = j)}{P(X_m = j)} \\ &= \frac{\sum_{\text{καταστάσεις } i} P(X_n = k, X_l = i, X_m = j)}{P(X_m = j)} \\ &= \sum_{\text{καταστάσεις } i} P(X_n = k | X_l = i, X_m = j) P(X_l = i | X_m = j) \\ &= \sum_{\text{καταστάσεις } i} P[X_n = k | X_l = i] P[X_l = i | X_m = j], \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

επειδή η διαδικασία είναι Markov και άρα

$$P(X_n = k | X_l = j, X_m = j) = P(X_n = k | X_l = j).$$

Η (2.1.2) γίνεται

$$P_{jk}(m, n) = \sum_{\text{καταστάσεις } i} P_{ji}(m, l) P_{ik}(l, n) \quad \text{για κάθε στιγμή } l. \quad (2.1.3)$$

Αυτή η εξίσωση είναι θεμελιώδης στη θεωρία διαδικασιών Markov και λέγεται **εξίσωση των Chapman-Kolmogorov (C-K)**. Κάθε διαδικασία Markov ικανοποιεί μian εξίσωση C-K μολονότι υπάρχουν και διαδικασίες που δεν είναι Markov και

ικανοποιούν εξισώσεις C-K.

Τώρα υποθέτουμε ότι η αλυσίδα Markov έχει τις ακόλουθες επιπλέον ιδιότητες:

$$\begin{aligned}
 1. \quad P[\text{μία αλλαγή κατάστασης στο διάστημα } (t, t + \Delta t)] &= \\
 &= 1 - P_{jj}(t, t + \Delta t) = q_j(t)\Delta t + o(\Delta t). \quad (2.1.4)
 \end{aligned}$$

Δηλαδή η πιθανότητα το σύστημα να φύγει από την κατάσταση j στο διάστημα Δt είναι ανάλογη του Δt . Η ποσότητα $o(\Delta t)$ ορίζεται:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0.$$

$$2. \quad P_{jk}(t, t + \Delta t) = q_{jk}(t)\Delta t + o(\Delta t) \quad (2.1.5)$$

3. Οι συναρτήσεις q_j, q_{jk} είναι συνεχείς.

Πηγαίνουμε στην εξίσωση C-K (2.1.3) και αντικαθιστούμε

$$m = \tau$$

$$l = t$$

$$n = t + \Delta t$$

Η εξίσωση C-K γίνεται:

$$\begin{aligned}
 P_{jk}(\tau, t + \Delta t) &= \sum_i P_{ji}(\tau, t) P_{ik}(t, t + \Delta t) \\
 &= P_{jk}(\tau, t) P_{kk}(t, t + \Delta t) + \sum_{i \neq k} P_{ji}(\tau, t) P_{ik}(t, t + \Delta t) \\
 &= P_{jk}(\tau, t) [1 - q_k(t)\Delta t + o(\Delta t)] + \sum_{i \neq k} P_{ji}(\tau, t) P_{ik}(t, t + \Delta t)
 \end{aligned}$$

όπου κάναμε χρήση της (2.1.4). Παρόμοια χρησιμοποιώντας την (2.1.5) ευρίσκομε

$$P_{jk}(\tau, t + \Delta t) = P_{jk}(\tau, t) [1 - q_k(t)\Delta t + o(\Delta t)] + \sum_{i \neq k} P_{ji}(\tau, t) [q_{ik}(t)\Delta t + o(\Delta t)]$$

και μετά από μερικές στοιχειώδεις πράξεις

$$\frac{\partial P_{jk}(\tau, t)}{\partial t} = -q_k(t)P_{jk}(\tau, t) + \sum_{i \neq k} P_{ji}(\tau, t)q_{ik}(t) \quad (2.1.6)$$

Η (2.1.6) είναι πολύ σημαντική και λέγεται **ευθεία εξίσωση του Kolmogorov**.

Τώρα με την αντικατάσταση

$$m = \tau$$

$$l = \tau + \Delta\tau$$

$$n = t$$

ευρίσκομε την **αντίστροφη εξίσωση του Kolmogorov**

$$\frac{\partial P_{jk}(\tau, t)}{\partial \tau} = q_j(\tau)P_{jk}(\tau, t) - \sum_{i \neq j} P_{ik}(\tau, t)q_{ji}(\tau) \quad (2.1.7)$$

Υπάρχουν πολλά αναμονητικά συστήματα όπου η κατάσταση του συστήματος (μέγεθος της ουράς) είναι Markov με συνεχή ή διακεκριμένο χρόνο και έχουν την ιδιότητα γέννησης-θανάτου, δηλαδή οι αλλαγές κατάστασης σ' ένα «μικρό» χρονικό διάστημα είναι +1 ή 0 ή -1 ή

$$P[\text{μετάβαση από το } n \text{ στο } n+1 \text{ στο } (t, t+\Delta t)] = \lambda_n \Delta t + o(\Delta t) \quad \text{για } n \geq 0$$

$$P[\text{μετάβαση από το } n \text{ στο } n-1 \text{ στο } (t, t+\Delta t)] = \mu_n \Delta t + o(\Delta t) \quad \text{για } n \geq 1$$

$$P[\text{καμμία μετάβαση στο } (t, t + \Delta t)] = 1 - (\lambda_n + \mu_n) \Delta t + o(\Delta t) \quad \text{για } n \geq 1$$

(2.1.8)

Στην πράξη μπορούμε να έχουμε ένα αναμονητικό σύστημα (π.χ. χώρος εναποθήκευσης σε σύστημα παραγωγής ή ουρά αναμονής σε τράπεζα) όπου τα αντικείμενα ή οι πελάτες φθάνουν τυχαία με ρυθμό λ_n είδη/χρόνο και εξυπηρετούνται με ρυθμό μ_n είδη/χρόνο. «Τυχαία» σημαίνει σύμφωνα με την έννοια των εξισώσεων (2.1.8). Το μέγεθος της ουράς στο χρόνο t είναι $X(t)$ και η χωρητικότητά της άπειρη. Αυτό είναι το λεγόμενο αναμονητικό σύστημα $M/M/1$, όπου M σημαίνει **χωρίς μνήμη (memoryless)**. Το πρώτο M είναι για την είσοδο, το δεύτερο για την έξοδο, και το 1 είναι ο αριθμός των εξυπηρετούντων (servers).

Συγκρίνοντας τις (2.1.4), (2.1.5) και (2.1.8) ευρίσκομε

$$q_{n, n+1}(t) = \lambda_n$$

$$q_{n, n-1}(t) = \mu_n$$

$$q_n(t) = \lambda_n + \mu_n. \quad (2.1.9)$$

Τώρα χρησιμοποιούμε την ευθεία εξίσωση του Kolmogorov (2.1.6) με

αρχή χρόνου $\tau = 0$

αρχική κατάσταση $j = 0$

τελική κατάσταση $k = n$

και υπολογίζουμε τις πιθανότητες

$$P_{0n}(0,t) \triangleq P_n(t) = P [\text{υπάρχουν } n \text{ είδη στο σύστημα στον } t]$$

$$\dot{P}_n(t) = \text{ρυθμός αύξησης της πιθανότητας } P_n(t)$$

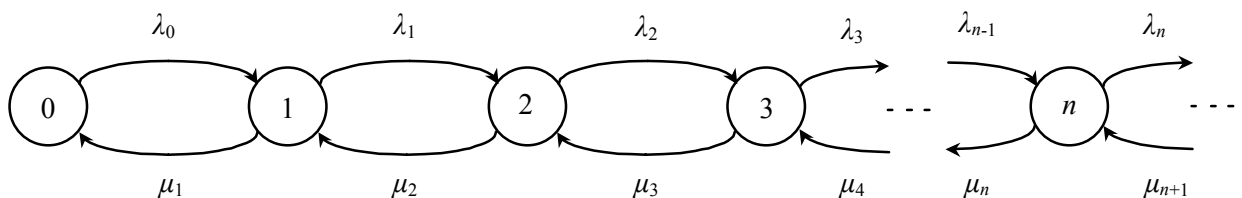
$$\dot{P}_n(t) = -(\lambda_n + \mu_n)P_n(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t) + \lambda_{n-1}P_{n-1}(t), \text{ για } n \geq 1 \quad (2.1.10)$$

και για $n = 0$

$$\dot{P}_0(t) = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t) \quad (2.1.11)$$

επειδή $\mu_0 = \lambda_{-1} = 0$.

Σχηματικά



Σχήμα 2.1. Διάγραμμα καταστάσεων συστήματος γέννησης-θανάτου

Οι εξισώσεις (2.1.10) και (2.1.11) είναι μορφές της ευθείας εξίσωσης Kolmogorov.

Τώρα υποθέτουμε:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_n = \lambda \\ \mu_n = \mu \end{array} \right\} \quad \forall n$$

και ότι οι εξισώσεις (2.1.10) και (2.1.11) έχουν **μόνιμη κατάσταση**, ήτοι

$$\left. \begin{array}{l} P_n(t) \rightarrow P_n \\ \dot{P}_n(t) \rightarrow 0 \end{array} \right\} \text{ καθώς } t \rightarrow \infty.$$

Για να υπάρχει αυτή η μόνιμη κατάσταση τα ακόλουθα πρέπει να ισχύουν

$$0 = -(\lambda + \mu)P_n + \mu P_{n+1} + \lambda P_{n-1}, \quad n \geq 1 \quad (2.1.12)$$

$$0 = -\lambda P_0 + \mu P_1. \quad (2.1.13)$$

Η (2.1.12) δίνει

$$P_{n+1} = \frac{\lambda + \mu}{\mu} P_n - \frac{\lambda}{\mu} P_{n-1} \quad (2.1.14)$$

και η (2.1.13)

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0. \quad (2.1.15)$$

Αντικαθιστούμε $n = 1, 2, \dots$ στην (2.1.14) και χρησιμοποιώντας την (2.1.15) ευρίσκομε

$$P_2 = \frac{\lambda^2}{\mu^2} P_0$$

$$P_3 = \frac{\lambda^3}{\mu^3} P_0$$

και με την τέλεια επαγωγή

$$P_n = \frac{\lambda^n}{\mu^n} P_0.$$

Ορίζουμε $\frac{\lambda}{\mu} \triangleq \rho$ οπότε

$$P_n = \rho^n P_0$$

και επειδή $\sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1$

$$P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = 1 \Rightarrow P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n}$$

το οποίο συγκλίνει μόνο αν $\rho < 1$ ή $\lambda < \mu$ που διαισθητικά σημαίνει ότι αν $\lambda \geq \mu$ ή ισοδύναμα

αν ο μέσος ρυθμός αφίξεων είναι \geq του μέσου ρυθμού εξυπηρέτησης, τότε η ουρά

αναμονής εκρήγνυται με τη συνεχή αύξηση και δεν υπάρχει μόνιμη κατάσταση.

Προφανώς

$$P_0 = 1 - \rho \quad \text{για } \rho < 1$$

και

$$P_n = \rho^n (1 - \rho), \quad n = 0, 1, \dots, \text{ για } \rho < 1. \quad (2.1.16)$$

Για να γίνει αντιληπτή η σημασία των διαφορικών εξισώσεων της ουράς $M/M/1$ γράφουμε τις εξισώσεις (2.1.10) για $\mu_n = 0$, δηλαδή η ουρά δεν έχει αναχωρήσεις.

$$\dot{P}_n(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t), \quad n \geq 1$$

$$\dot{P}_0(t) = -\lambda P_0(t).$$

Έστω ότι $P_0(0) = 1$ και $P_1(0) = P_2(0) = \dots = 0$. Τότε

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

$$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

$$P_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2} e^{-\lambda t}$$

και με τέλεια επαγωγή

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n \geq 0$$

η οποία είναι η πιθανότητα **Poisson με παράμετρο λt** . Θυμηθείτε τώρα ότι

$$P_n(t) = P[n \text{ αφίξεις στο χρόνο } t].$$

Έστω ότι ο χρόνος ανάμεσα σε διαδοχικές αφίξεις είναι T , τότε

$$P[T \geq t] = P[\text{μηδέν αφίξεις στον } t] = P_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Η **συνάρτηση κατανομής του T** είναι

$$F_a(t) = P[T < t] = 1 - e^{-\lambda t}$$

και η **συνάρτηση πυκνότητας**

$$f_a(t) = \dot{F}_a(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

το οποίο σημαίνει ότι

άν οι αφίξεις είναι Poisson, τότε οι χρόνοι ανάμεσα στις αφίξεις είναι εκθετικά καταναμεμημένοι με μέση τιμή $\frac{1}{\lambda}$

και αντίστροφα,

αν οι χρόνοι ανάμεσα στις αφίξεις είναι ανεξάρτητοι και εκθετικά καταναμεμημένοι, τότε οι αφίξεις είναι Poisson.

Κατά τον ίδιο τρόπο θέτουμε $\lambda_n = 0$ στην (2.1.10) που σημαίνει ότι στο χρόνο t έχουμε $N(t)$ αντικείμενα ή πελάτες στο σύστημα και δεν υπάρχουν αφίξεις παρά μόνο αναχωρήσεις. Τότε

$$P_N(0) = 1$$

$$P_{N-1}(0) = P_{N-2}(0) = \dots = P_0(0) = 0$$

και

$$\dot{P}_n(t) = -\mu P_n(t) + \mu P_{n+1}(t)$$

$$\dot{P}_0(t) = \mu P_1(t).$$

Για $n = N$ ευρίσκομε

$$\dot{P}_N(t) = -\mu P_N(t) \text{ ή}$$

$$P_N(t) = e^{-\mu t} \text{ και επαγωγικά}$$

⋮

$$P_{N-k}(t) = \frac{(\mu t)^k}{k!} e^{-\mu t}$$

η οποία είναι Poisson και επομένως οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικά καταναμεμημένοι ή

$$f_s(t) = \mu e^{-\mu t} \text{ με μέση τιμή } \frac{1}{\mu}.$$

Βρήκαμε τις σημαντικές διαφορικές-διαφοράς εξισώσεις (2.1.10) και (2.1.11)

χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες Markov και είδαμε ότι η διαδικασία που προκύπτει είναι Poisson. Οι ίδιες εξισώσεις μπορούν να ευρεθούν υποθέτοντας ότι η διαδικασία αφίξεων είναι Poisson και οι χρόνοι εξυπηρέτησης εκθετικοί. Μετά μπορεί ν' αποδειχθεί ότι η διαδικασία είναι Markov. Εδώ βρήκαμε τις εξισώσεις με το γενικότερο δυνατό τρόπο.

2.2 Μερικές Βασικές Ιδέες Αναμονητικών Συστημάτων

Η στοχαστική διαδικασία $N(t)$ έχει ορισθεί σαν ο συνολικός αριθμός πελατών στο σύστημα στο χρόνο t . Ο πελάτης C_n φθάνει στο σύστημα τη στιγμή τ_n και ο χρόνος ανάμεσα στις αφίξεις των C_{n-1} και C_n είναι:

$$t_n = \tau_n - \tau_{n-1} \quad (2.2.1)$$

Αντίστοιχα ονομάζουμε w_n το χρόνο αναμονής στην ουρά και x_n το χρόνο εξυπηρέτησης του C_n . Ο συνολικός χρόνος στο σύστημα είναι:

$$s_n = w_n + x_n \quad (2.2.2)$$

Εφ' όσον υπάρχει μόνιμη κατάσταση στο σύστημα τότε

$$E(t_n) \rightarrow \bar{t} \text{ και } \bar{t} = \frac{1}{\lambda}. \quad (2.2.3)$$

Ομοίως

$$E(x_n) \rightarrow \bar{x} \text{ και } \bar{x} = \frac{1}{\mu}. \quad (2.2.4)$$

Ορίζουμε ακόμη δύο στοχαστικές διαδικασίες, τις

$a(t)$: αριθμός αφίξεων στο $[0, t]$

$d(t)$: αριθμός αναχωρήσεων στο $[0, t]$

Τότε

$$N(t) = a(t) - d(t). \quad (2.2.5)$$

Ορίζουμε σαν T_i το μέσο χρόνο αναμονής στο σύστημα του κάθε πελάτη στο διάστημα $[0, t]$. Υποθέτουμε ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T_t = T$$

και ο μέσος αριθμός πελατών N_t στο $[0, t]$ ικανοποιεί

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N_t = \bar{N}.$$

Ο νόμος του Little μας λέει ότι

$$\bar{N} = \lambda T. \quad (2.2.6)$$

Η (2.2.6) ήταν γνωστή από δεκαετιών αλλά αποδείχθηκε αυστηρά το 1961 από τον Little. Αν οι ποσότητες της (2.2.6) αναφερθούν στην **ουρά αναμονής** μόνο αντί σ' ολόκληρο το σύστημα, τότε

$$\bar{N}_q = \lambda W \quad (2.2.7)$$

ενώ για το **σύστημα εξυπηρέτησης** έχουμε

$$\bar{N}_s = \lambda \bar{x} \quad (2.2.8)$$

όπου \bar{N}_s είναι ο μέσος αριθμός πελατών στο χώρο εξυπηρέτησης.

Η σύμβαση συμβολισμού ενός αναμονητικού συστήματος είναι:

I/O/m/K/P

I : στατιστική εισόδου (*M*: χωρίς μνήμη, *G*: γενική, *E*: Erlang)

O : στατιστική εξόδου

m : αριθμός εξυπηρετούντων

K : χωρητικότητα συστήματος

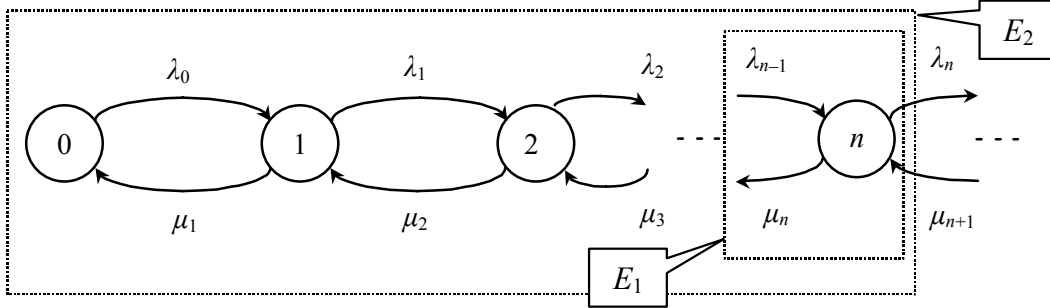
P : μέγεθος πληθυσμού πελατών

Για παράδειγμα, *M/G/5/50/1000* είναι ένα αναμονητικό σύστημα όπου η είσοδος είναι Poisson, η έξοδος γενικής κατανομής, υπάρχουν 5 σταθμοί εξυπηρέτησης, η χωρητικότητα του συστήματος (ουρά + εξυπηρέτηση) είναι 50, και ο συνολικός αριθμός πελατών είναι 1000.

Επιστρέφουμε τώρα στις εξισώσεις (2.1.10) και (2.1.11) που γράφονται στη **μόνιμη κατάσταση**

$$0 = -(\lambda_n + \mu_n)P_n + \lambda_{n-1}P_{n-1} + \mu_{n+1}P_{n+1} \quad (2.2.9)$$

$$\lambda_{-1} = \lambda_{-2} = \dots = \mu_0 = \mu_{-1} = \dots = 0$$



Σχήμα 2.2. Ροές μέσα/έξω για το σύστημα γέννησης-θανάτου

Από το διάγραμμα καταστάσεων βλέπουμε ότι η (2.2.9) μας δίνει την αρχή της διατήρησης της ροής ή της συνέχειας σε κάθε κατάσταση. Στην κατάσταση n έχουμε:

$$\text{Ροή προς τα έξω:} \quad \lambda_n P_n + \mu_n P_n$$

$$\text{Ροή προς τα μέσα:} \quad \lambda_{n-1} P_{n-1} + \mu_{n+1} P_{n+1}$$

και η εξίσωσή τους μας δίνει την (2.2.9) που είναι ισολογισμός ροής γύρω από την E_1 .

Αν τώρα θεωρήσουμε την E_2 ο ισολογισμός ροής δίνει

$$\lambda_n P_n = \mu_{n+1} P_{n+1} \quad (2.2.10)$$

απ' όπου ευρίσκομε

$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_0} P_0$$

και επαγωγικά όπως σε προηγούμενη περίπτωση

$$P_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} P_0 \quad (2.2.11)$$

Η (2.2.11) είναι η λύση της (2.2.9). Τώρα

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \Rightarrow P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}} P_0 = 1$$

$$\Rightarrow P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}}}. \quad (2.2.12)$$

Οι (2.2.11) και (2.2.12) για $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda$ και $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu$ μας δίνουν το σύστημα $M/M/1$ και τις λύσεις του προηγούμενου κεφαλαίου.

Μπορεί ν' αποδειχθεί ότι για να έχουμε λύση μόνιμης κατάστασης, πρέπει:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}} < \infty \quad (2.2.13)$$

που δίνει την εξής **συνθήκη για την ύπαρξη στο πρόβλημα μόνιμης κατάστασης**:

$$\exists k_0 \text{ τέτοιο ώστε } \forall k \geq k_0 \quad \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}} < 1. \quad (2.2.14)$$

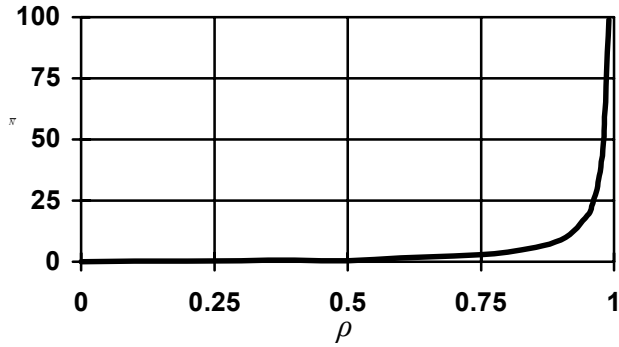
Επανερχόμαστε τώρα στο σύστημα $M/M/1$. Ο μέσος αριθμός πελατών $E(n)$ στο σύστημα είναι:

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \sum_{n=0}^{\infty} n (1-\rho) \rho^n \\ &= (1-\rho) \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^n = (1-\rho) \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \right) \\ &= (1-\rho) \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{1-\rho} \right) \\ &= \frac{\rho}{1-\rho}. \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

Η διασπορά $\text{Var}(n)$ είναι

$$\begin{aligned} \sigma_N^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} (n - \bar{N})^2 P_n \\ &= \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

Η γραφική απεικόνιση του \bar{N} έχει ως εξής:



Σχήμα 2.3. Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα $M/M/1$ συναρτήσει του ρ

Παρατηρούμε ότι είναι επικίνδυνο να λειτουργούμε το σύστημα κοντά στη χωρητικότητά του δηλαδή για $\lambda \cong \mu$. Πρέπει $\lambda < \mu$ και μάλιστα $\lambda \ll \mu$. Αυτό συμβαίνει επειδή για $\lambda \cong \mu$ μπορεί κατά μέσον όρο να εξυπηρετούμε όσους έρχονται κατά μέσον όρο πάλι και το σύστημα να είναι αδρανές κατά $P_0 = 1 - \rho$ του χρόνου, αλλά τυχαίες αφίξεις μπορούν να συμβούν ομαδικά και η ουρά να εκραγεί.

Τέλος για την ουρά $M|M|1$ ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα είναι:

$$T = \frac{\bar{N}}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} \quad (2.2.17)$$

και η πιθανότητα να έχει το σύστημα τουλάχιστον n πελάτες στη μόνιμη κατάσταση είναι:

$$P[N(t) \geq n] = \sum_{k=n}^{\infty} P_k = \sum_{k=n}^{\infty} (1-\rho)\rho^k = \rho^n. \quad (2.2.18)$$

2.3 Αφίξεις με Αποθάρρυνση

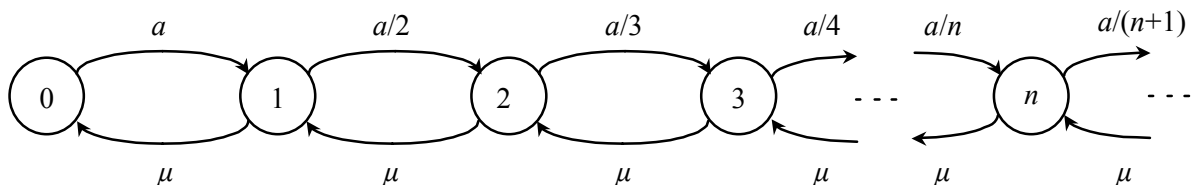
(Discouraged arrivals)

Το σύστημα αναμονής τώρα έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

$$\lambda_n = \frac{a}{n+1}, \quad \text{για } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mu_n = \mu, \quad \text{για } n = 1, 2, \dots$$

Το διάγραμμα κατάστασης είναι



Σχήμα 2.4. Αφίξεις με αποθάρρυνση

Από την (2.2.11) ευρίσκομε

$$P_n = P_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a}{\mu(k+1)} = P_0 \left(\frac{a}{\mu} \right)^n \frac{1}{n!} \quad (2.3.1)$$

και από την (2.2.12) ευρίσκομε

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{\mu} \right)^n \frac{1}{n!}} = \frac{1}{e^{a/\mu}} = e^{-a/\mu} \quad (2.3.2)$$

Οι συνθήκες ύπαρξης μόνιμης κατάστασης εδώ δίνουν $\frac{a}{\mu} < \infty$.

Προφανώς

$$P_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{a}{\mu} \right)^n e^{-a/\mu} \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.3.3)$$

που είναι Poisson. Ο μέσος αριθμός πελατών είναι

$$\bar{N} = \frac{a}{\mu} \quad (2.3.4)$$

και ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα

$$T = \frac{\bar{N}}{\lambda}$$

αλλά, επειδή $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n/n!)$, προκύπτει

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a}{n+1} \frac{1}{n!} \left(\frac{a}{\mu}\right)^n e^{-a/\mu} = \mu(1 - e^{-a/\mu})$$

οπότε

$$T = \frac{a}{\mu^2(1 - e^{-a/\mu})} . \quad (2.3.5)$$

2.4 Το Σύστημα $M/M/\infty$

Σε αυτό το σύστημα υποθέτουμε ότι ο εξυπηρετών αυξάνει το ρυθμό εξυπηρέτησης ή ότι το σύστημα διαθέτει πάντα έναν εξυπηρετούντα μόλις υπάρξει ζήτηση.

Έχουμε λοιπόν

$$\lambda_n = \lambda, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$\mu_n = n\mu, \quad n = 1, 2, \dots$$

Όπως στις προηγούμενες περιπτώσεις υπολογίζουμε

$$P_n = P_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda}{(k+1)\mu} \quad (2.4.1)$$

που είναι ακριβώς η προηγούμενη περίπτωση για $a = \lambda$. Άρα

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} e^{-\lambda/\mu}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.4.2)$$

$$\bar{N} = \frac{\lambda}{\mu} . \quad (2.4.3)$$

Τέλος από τον τύπο του Little

$$T = \frac{\bar{N}}{\lambda} = \frac{1}{\mu} \quad (2.4.4)$$

που είναι κάτι αναμενόμενο.

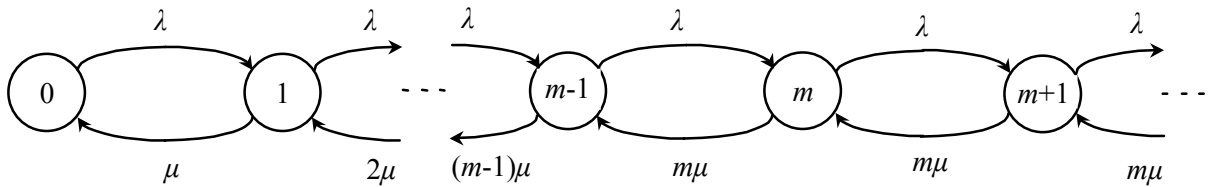
2.5 Το Σύστημα $M/M/m$

Το σύστημα διαθέτει το πολύ m εξυπηρετούντες. Εδώ ισχύει:

$$\lambda_n = \lambda, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$\mu_n = \min(n\mu, m\mu), \quad n = 1, 2, \dots$$

Η συνθήκη για την ύπαρξη μόνιμης κατάστασης είναι $\frac{\lambda}{m\mu} < 1$ και το διάγραμμα κατάστασης



Σχήμα 2.5. Σύστημα $M/M/m$

Οι πιθανότητες P_n για $n \leq m$ είναι

$$P_n = P_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda}{(k+1)\mu} = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} \quad (2.5.1)$$

και για $n \geq m$

$$P_n = P_0 \prod_{k=0}^{m-1} \frac{\lambda}{(k+1)\mu} \prod_{i=m}^{n-1} \frac{\lambda}{m\mu} = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{1}{m!} \left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^{n-m} = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{m!} \frac{1}{m^{n-m}}. \quad (2.5.2)$$

Ορίζουμε

$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu}$$

και για $\rho < 1$ έχουμε από τις εξισώσεις (2.5.1) και (2.5.2)

$$\begin{aligned}
P_n &= P_0 \frac{(m\rho)^n}{n!} & n \leq m \\
P_n &= P_0 \frac{\rho^n m^m}{m!} & n \geq m.
\end{aligned}
\tag{2.5.3}$$

Τέλος, από την (2.2.12)

$$\begin{aligned}
P_0 &= \left[1 + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(m\rho)^k}{k!} + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(m\rho)^k}{m!} \frac{1}{m^{k-m}} \right]^{-1} \\
&= \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^k}{k!} + \frac{(m\rho)^m}{m!} \frac{1}{1-\rho} \right]^{-1}.
\end{aligned}
\tag{2.5.4}$$

Τα τηλεφωνικά συστήματα είναι της μορφής $M/M/m$ και θα ήταν ενδιαφέρον να υπολογίσουμε την πιθανότητα ένα τηλεφώνημα να μη βρει διαθέσιμο κύκλωμα

$$P[\text{σύστημα πλήρες}] = \sum_{n=m}^{\infty} P_n = \sum_{n=m}^{\infty} P_0 \frac{(m\rho)^n}{m!} \frac{1}{m^{n-m}}$$

και μετά λίγη άλγεβρα

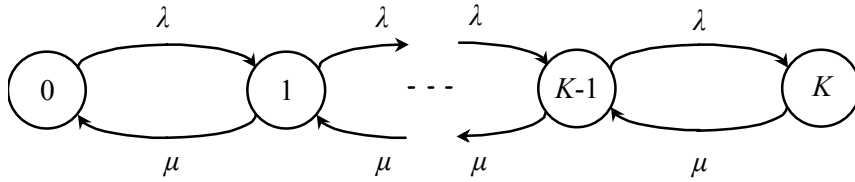
$$P[\text{σύστημα πλήρες}] = \frac{\frac{(m\rho)^m}{m!} \frac{1}{1-\rho}}{\sum_{n=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} + \frac{(m\rho)^m}{m!} \frac{1}{1-\rho}}
\tag{2.5.5}$$

που λέγεται **τύπος του Erlang**.

2.6 Το Σύστημα $M/M/1/K$

Το σύστημα αναμονής έχει χωρητικότητα K πελατών συμπεριλαμβανομένου και του εξυπηρετούμενου πελάτη. Οι αφίξεις είναι Poisson αλλά όταν το περιεχόμενο της ουράς είναι $K-1$ ο πελάτης φεύγει. Ένας αφικνούμενος πελάτης μπορεί να μπει στην ουρά μόνο όταν η κατάστασή της είναι $< K-1$.

Το διάγραμμα κατάστασης είναι



Σχήμα 2.6. Σύστημα $M/M/1/K$

όπου

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & \text{για } n < K \\ 0 & \text{για } n \geq K \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} \mu & \text{για } n \leq K \\ 0 & \text{για } n > K \end{cases}$$

Από τα προηγούμενα ευρίσκουμε ότι υπάρχει μόνιμη κατάσταση για $\lambda < \mu$ και

$$P_n = \begin{cases} P_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda}{\mu} = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n, & n \leq K \\ 0, & n > K \end{cases} \quad (2.6.1)$$

Επίσης

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}} = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^K \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^K}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)}}$$

$$\Rightarrow P_0 = \frac{1 - \lambda / \mu}{1 - (\lambda / \mu)^{K+1}} \quad (2.6.2)$$

οπότε

$$P_n = \begin{cases} \frac{1 - \lambda / \mu}{1 - (\lambda / \mu)^{K+1}} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n, & 0 \leq n \leq K \\ 0, & n > K \text{ ή } n < 0. \end{cases} \quad (2.6.3)$$

2.7 Το Σύστημα $M/M/m/m$

(Complete loss system)

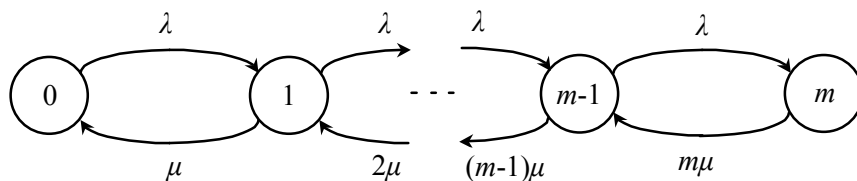
Εδώ υπάρχουν m εξυπηρετούντες και η χωρητικότητα του συστήματος είναι m που σημαίνει ότι μόλις και οι m εξυπηρετούντες είναι κατειλημμένοι, τότε κάθε νέος πελάτης που φθάνει στο σύστημα χάνεται.

Το μοντέλο τώρα γίνεται

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & n < m \\ 0, & n \geq m \end{cases}$$

$$\mu_n = n\mu, \quad n = 1, 2, \dots, m$$

Το διάγραμμα είναι



Σχήμα 2.7. Σύστημα $M/M/m/m$

και οι αντίστοιχες πιθανότητες

$$P_n = \begin{cases} P_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda}{(k+1)\mu} = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}, & n \leq m \\ 0, & n > m. \end{cases} \quad (2.7.1)$$

Η αρχική πιθανότητα είναι

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^m \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}} \quad (2.7.2)$$

και άρα

$$P_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}}{\sum_{k=0}^m \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}}$$

η οποία για $n = m$ γίνεται

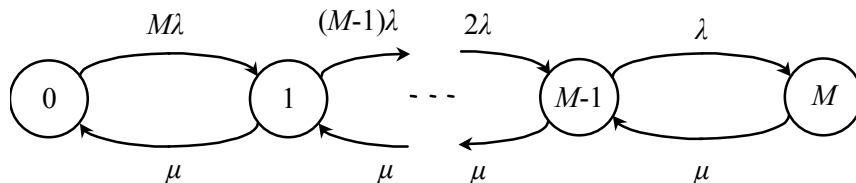
$$P_m = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{1}{m!}}{\sum_{k=0}^m \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}} \quad (2.7.3)$$

που είναι ο τύπος **B(m, λ/μ) του Erlang**, τον οποίο βρήκε ο Erlang το 1917 και είναι η πιθανότητα σ' ένα τηλεφωνικό σύστημα m γραμμών (εν γένει εξυπηρετούντων) να είναι κατειλημμένες και οι m γραμμές.

2.8 Το Σύστημα $M/M/1/\infty/M$

(Finite-population model)

Αυτό το σύστημα δεν έχει μνήμη (όπως και τα προηγούμενα) υπάρχει ένας εξυπηρετών, και ενώ η ουρά έχει απεριόριστη χωρητικότητα, οι χρήστες του συστήματος είναι M . Συχνά το ∞ παραλείπεται και γράφουμε $M/M/1/M$. Ο κάθε πελάτης φθάνει με ρυθμό λ , δηλαδή ο χρόνος άφιξης είναι μια εκθετική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή $1/\lambda$. Όταν υπάρχουν στο σύστημα n πελάτες (στην ουρά και στην εξυπηρέτηση), τότε υπολείπονται $M-n$ πελάτες των οποίων ο ρυθμός άφιξης είναι $\lambda(M-n)$. Κατασκευάζουμε το εξής μοντέλο:



Σχήμα 2.8. Σύστημα $M/M/1/M$

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda (M-n), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\mu_n = \mu, \quad n=1,2,\dots, M.$$

Όπως στα προηγούμενα

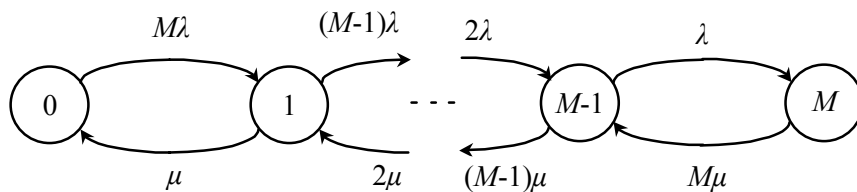
$$P_n = \begin{cases} P_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda(M-k)}{\mu} = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{M!}{(M-n)!}, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (2.8.1)$$

και η αρχική πιθανότητα

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^M \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{M!}{(M-n)!}}. \quad (2.8.2)$$

2.9 Το σύστημα $M/M/\infty/\infty/M$

Αυτό είναι σαν το προηγούμενο σύστημα μόνο που τώρα οι εξυπηρετούντες είναι όσοι και οι πελάτες. Το διάγραμμα είναι



Σχήμα 2.9. Σύστημα $M/M/\infty/\infty/M$

και

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda (M-n), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\mu_n = n\mu, \quad n=1,2,\dots, M.$$

Όπως συνήθως, οι πιθανότητες είναι

$$P_n = \begin{cases} P_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda(M-k)}{\mu(k+1)} = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{M!}{n!(M-n)!} = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \binom{M}{n}, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (2.9.1)$$

και

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^M \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \binom{M}{n}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)^M} \quad (2.9.2)$$

οπότε

$$P_n = \begin{cases} \frac{\binom{M}{n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{\left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)^M}, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (2.9.3)$$

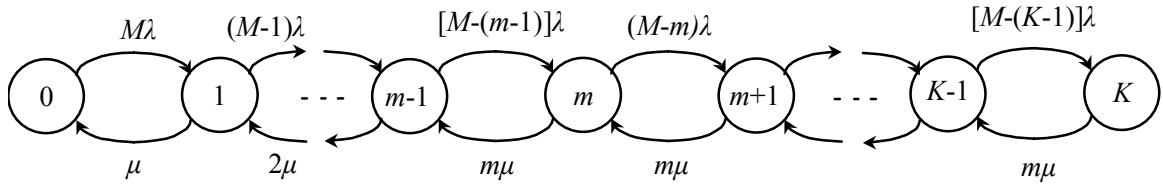
2.10 Το Σύστημα $M/M/m/K/M$

Αυτό είναι το τελευταίο σύστημα που εξετάζουμε εδώ που λύνεται με τις εξισώσεις γέννησης-θανάτου. **Είναι η γενίκευση όλων των συστημάτων που είδαμε ως τώρα.** Είναι σύστημα χωρίς μνήμη, με m εξυπηρετούντες, χωρητικότητα K και πληθυσμό M . Χρησιμοποιώντας τις ιδέες των προηγούμενων παραδειγμάτων έχουμε:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda (M-n), & 0 \leq n \leq K-1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Υποθέτουμε εδώ $m \leq K \leq M$ και ότι αν ένας πελάτης του πληθυσμού των M εύρει την ουρά με $K-1$ πελάτες επιστρέφει ακαριαία στον πληθυσμό και υπόκειται πάλι στην τυχαία άφιξη. Επίσης

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & 0 \leq n \leq m \\ m\mu, & n \geq m \end{cases}$$



Σχήμα 2.10. Σύστημα $M/M/m/K/M$

Ο υπολογισμός των P_n γίνεται πρώτα για $0 \leq n \leq m-1$

$$P_n = P_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda(M-k)}{\mu(k+1)} = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \binom{M}{n}, \quad 0 \leq n \leq m-1 \quad (2.10.1)$$

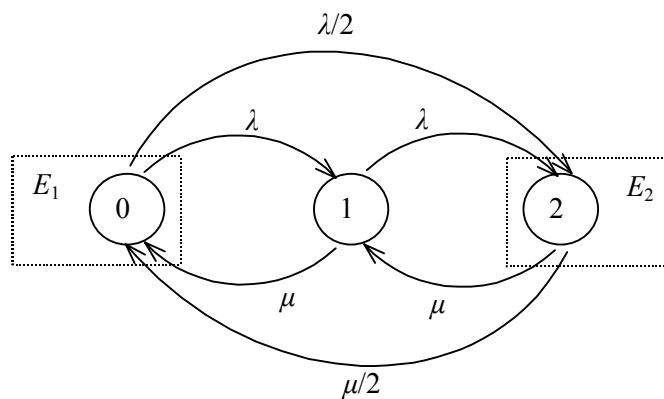
και για $m \leq n \leq K$ ευρίσκομε

$$\begin{aligned} P_n &= P_0 \frac{\lambda(M-k)}{\mu(k+1)} \prod_{k=m}^{n-1} \frac{\lambda(M-k)}{m\mu} \\ &= P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \binom{M}{n} \frac{n!}{m!} m^{m-n}, \quad m \leq n \leq K \end{aligned} \quad (2.10.2)$$

Τελικά μπορούμε να εφαρμόσουμε τους γνωστούς τύπους για τον υπολογισμό του P_0 .

3 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ MARKOV ΟΠΟΥ ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΓΕΝΝΗΣΗΣ-ΘΑΝΑΤΟΥ ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ

Τώρα εξετάζουμε αναμονητικά συστήματα όπου οι επιτρεπτές μεταβάσεις δεν είναι μόνο $-1, 0, +1$ αλλά βήματα μεγαλύτερου μεγέθους επιτρέπονται. Αν και οι βασικές ιδέες των όσων είδαμε ως τώρα ισχύουν, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τα μοντέλα γέννησης-θανάτου.



Σχήμα 3.1. Παράδειγμα

Αν στο σύστημα του σχήματος εφαρμόσουμε την αρχή της διατήρησης της ροής ευρίσκομε τις εξισώσεις:

$$E_1 : \left(\frac{\lambda}{2} + \lambda \right) P_0 = \mu P_1 + \frac{\mu}{2} P_2$$

$$E_2 : \frac{\lambda}{2} P_0 + \lambda P_1 = \left(\mu + \frac{\mu}{2} \right) P_2$$

$$P_0 + P_1 + P_2 = 1.$$

3.1 Η Κατανομή Erlang E_n

Είδαμε ότι η εκθετική κατανομή είναι χωρίς μνήμη. Αυτή η έλλειψη μνήμης καταστρέφεται αν χρησιμοποιηθεί άλλη κατανομή. Ο Erlang επενόησε τη μέθοδο της

διάσπασης σε βαθμίδες με εκθετική κατανομή σε περίπτωση άλλης κατανομής για να κάνει χρήση έτσι της έλλειψης μνήμης.

Μια βαθμίδα εξυπηρέτησης έχει **εκθετική κατανομή χρόνου εξυπηρέτησης** όταν ο χρόνος X έχει στατιστική:

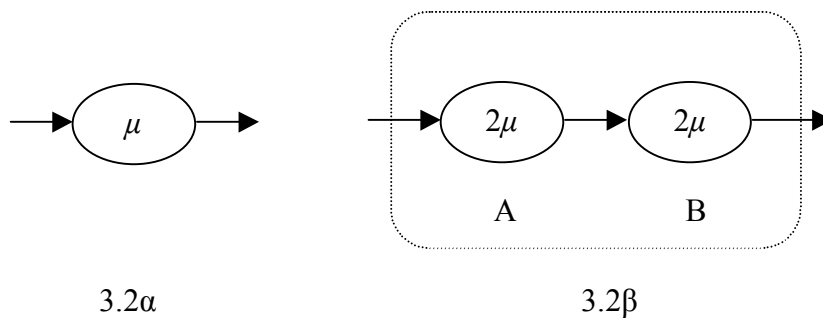
$$b(x) = \mu e^{-\mu x} u(x) \quad (3.1.1)$$

όπου $u(x)$ είναι η βηματική συνάρτηση και

$$E(X) = \frac{1}{\mu}$$

$$Var(X) = \frac{1}{\mu^2}.$$

Μια τέτοια βαθμίδα εξυπηρέτησης την παριστάνουμε στο σχ. 3.2α



Σχήμα 3.2. Συστήματα με μία και δύο βαθμίδες εξυπηρέτησης

Έστω τώρα η βαθμίδα σχ. 3.2β. Για την κάθε βαθμίδα ισχύουν

$$b(x) = 2\mu e^{-2\mu x} u(x)$$

$$E(X) = \frac{1}{2}, \quad Var(X) = \left(\frac{1}{2\mu}\right)^2.$$

Εδώ υποθέτουμε ότι ο πελάτης πηγαίνει στη βαθμίδα A και μόλις τελειώσει προχωρεί στη B ενώ κανένας πελάτης δεν μπαίνει τώρα στην A. Ο τωρινός πελάτης τελειώνει την εξυπηρέτησή του στη B και μόνο τότε νέος πελάτης μπαίνει στο σύστημα. Έτσι σε κάθε στιγμή είτε η A ή η B βαθμίδα είναι ελεύθερη.

Η κατανομή της συνολικής βαθμίδας εξυπηρέτησης είναι η κατανομή του αθροίσματος δύο ανεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητών Y και Z με εκθετική κατανομή. Αυτή είναι η συνέλιξη των δύο κατανομών

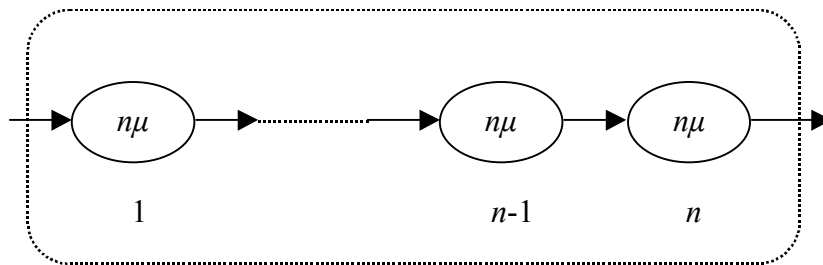
$$\begin{aligned}
 b(x) &= b_A(x) \otimes b_B(x) = \int_{-\infty}^{\infty} 2\mu e^{-2\mu y} 2\mu e^{-2\mu(x-y)} u(y)u(x-y) dy \\
 &= 4\mu^2 e^{-2\mu x} \int_0^x dy = 2\mu(2\mu x)e^{-2\mu x} u(x). \tag{3.1.2}
 \end{aligned}$$

Επίσης
$$E(X) = E(Y) + E(Z) = 2 \frac{1}{2\mu} = \frac{1}{\mu}$$

$$Var(X) = Var(Y) + Var(Z) = 2 \frac{1}{4\mu^2} = \frac{1}{2\mu^2}.$$

Η κατανομή (3.1.2) είναι **Erlang-2**.

Γενικεύουμε τώρα για n βαθμίδες:



Σχήμα 3.3. Απεικόνιση n βαθμίδων

Η κατανομή είναι:

$$b(x) = \{ \dots \{ [b_1(x) \otimes b_2(x)] \otimes b_3(x) \} \otimes \dots \otimes b_n(x) \}.$$

Όπως προηγουμένως,

$$b_1(x) \otimes b_2(x) = n\mu (n \mu x) e^{-n\mu x} u(x)$$

και

$$b_1(x) \otimes b_2(x) \otimes b_3(x) = \int_{-\infty}^{\infty} n\mu (n\mu y) e^{-n\mu y} n\mu e^{-n\mu(x-y)} u(y)u(x-y) dy$$

$$= n\mu(n\mu)^2 e^{-n\mu x} \int_0^x y dy = \frac{n\mu(n\mu x)^2}{2} e^{-n\mu x}.$$

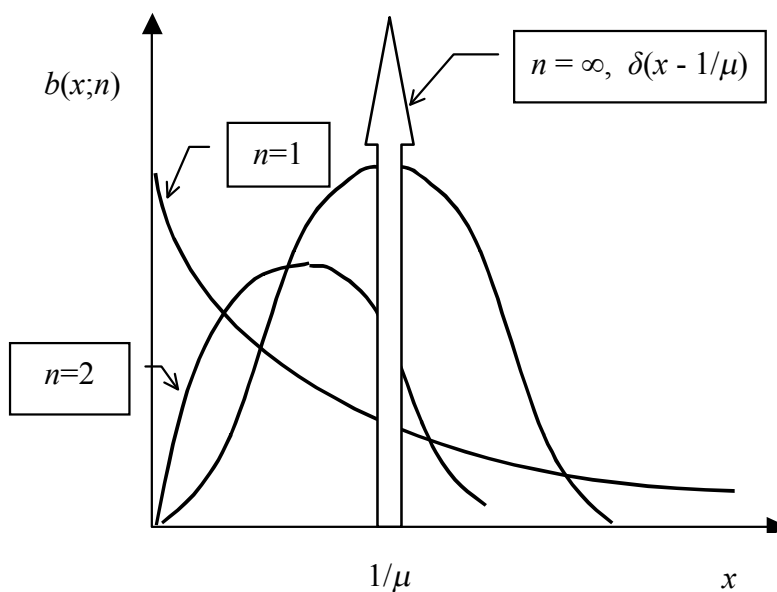
Και γενικεύοντας επαγωγικά ευρίσκομε την κατανομή

$$b(x) = \frac{n\mu(n\mu x)^{n-1} e^{-n\mu x}}{(n-1)!} u(x) \tag{3.1.3}$$

που λέγεται **Erlang- n** .

Προφανώς
$$E(X) = n \frac{1}{n\mu} = \frac{1}{\mu}$$

$$Var(X) = n \left(\frac{1}{n\mu} \right)^2 = \frac{1}{n\mu^2}.$$



Σχήμα 3.4. Οικογένεια $b(x ; n)$

Από το θεώρημα κεντρικού ορίου, καθώς $n \rightarrow \infty$ η κατανομή γίνεται Gauss.

Παρατηρούμε όμως ότι η διασπορά $Var(X) = \frac{1}{n\mu^2} \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$. Έχουμε δηλαδή

μια ακολουθία κατανομών που, στο όριο ορίζουν ένα δέλτα του Dirac $\delta(x - \frac{1}{\mu})$ όπως

φαίνεται στο σχήμα.

Το μέγιστο των καμπυλών αυτών συμβαίνει για x τέτοιο ώστε

$$\frac{db(x)}{dx} = 0 \Rightarrow x = \frac{n-1}{n-\mu}$$

που σημαίνει ότι για $n \gg \mu$, $x \rightarrow \frac{1}{\mu}$.

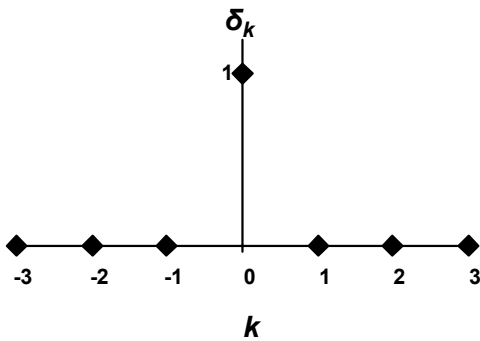
3.2 Ο Μετασχηματισμός z

Ο μετασχηματισμός z χρησιμοποιείται πολύ στη λύση εξισώσεων διαφοράς. Τέτοιες εξισώσεις θα συναντήσουμε σύντομα στα επόμενα κεφάλαια.

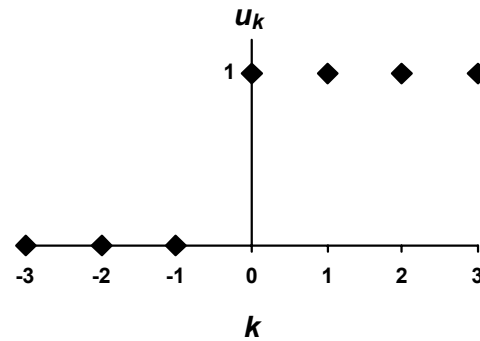
Έστω η διακεκριμένη συνάρτηση $f(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ όπου k είναι οι διακεκριμένες χρονικές στιγμές. Ορίζουμε το μετασχηματισμό z της $f(k)$, $F(z)$, ως εξής:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^k \quad (3.2.1)$$

Η μεταβλητή z είναι μιγαδική και η ακολουθία $f(k)$ αυξάνεται αργότερα από την z^k , ενώ το άθροισμα $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ υπάρχει. Το ζεύγος $f \leftrightarrow F$ είναι μοναδικό όπως στους αντίστοιχους συνεχείς μετασχηματισμούς Fourier και Laplace.



Σχήμα 3.5α



Σχήμα 3.5β

Το αντίστοιχο του δ του Dirac για διακεκριμένους χρόνους είναι (Σχ. 3.5α)

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

ενώ το αντίστοιχο της βηματικής συνάρτησης είναι $u_\kappa = 1, \kappa = 0, 1, 2, \dots$ (Σχ. 3. 5β)

Τότε

$$\delta_k \leftrightarrow 1$$

$$u_k \leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \text{ για } |z| < 1.$$

Έστω τώρα $f(k) = a^k$. Τότε

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (az)^k = \frac{1}{1-az}, \text{ για } |az| < 1.$$

Η συνέλιξη δύο συναρτήσεων $f_1(k)$ και $f_2(k)$ ορίζεται:

$$f_1(k) \otimes f_2(k) = \sum_{i=0}^k f_1(k-i)f_2(i) = \sum_{i=0}^k f_1(i)f_2(k-i). \quad (3.2.2)$$

Τότε αν $f_1 \leftrightarrow F_1$ και $f_2 \leftrightarrow F_2$

$$f_1 \otimes f_2 \leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k f_1(k-i)f_2(i) \right) z^k$$

αλλά

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k a_i = (a_0) + (a_0 + a_1) + (a_0 + a_1 + a_2) + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=i}^{\infty} a_k$$

οπότε

$$f_1 \otimes f_2 \leftrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} f_2(i)z^i \sum_{k=i}^{\infty} f_1(k-i)z^{k-i} = F_1(z)F_2(z). \quad (3.2.3)$$

Για να υπολογίσουμε την $f(k)$ από την $F(z)$ χρησιμοποιούμε τους πίνακες III.1, III.2. Συχνά αυτή η διαδικασία διευκολύνεται με την ακόλουθη μέθοδο. Έστω

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

όπου τα N και D είναι πολυώνυμα του z . Συμβολίζοντας τις ρίζες του D με $1/a_i$ με πολλαπλότητα m_i έχουμε

$$D(z) = D_0 \prod_{i=1}^n (1 - a_i z)^{m_i}$$

όπου D_0 είναι μία σταθερά (που δεν επηρεάζει την ανάλυση που ακολουθεί) και m_i η πολλαπλότητα της ρίζας $1/a_i$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι το κλάσμα $F(z)$ διασπάται σε απλούστερα κλάσματα ως εξής

$$F(z) = \frac{A_{11}}{(1-a_1z)^{m_1}} + \frac{A_{12}}{(1-a_1z)^{m_1-1}} + \dots + \frac{A_{1m_1}}{(1-a_1z)} +$$

$$+ \frac{A_{21}}{(1-a_2z)^{m_2}} + \frac{A_{22}}{(1-a_2z)^{m_2-1}} + \dots + \frac{A_{2m_2}}{(1-a_2z)} + \dots$$

$$+ \frac{A_{n1}}{(1-a_nz)^{m_n}} + \frac{A_{n2}}{(1-a_nz)^{m_n-1}} + \dots + \frac{A_{nm_n}}{(1-a_nz)}$$

και οι όροι A_{ij} δίνονται από:

$$A_{ij} = \frac{1}{(j-1)!} \left(-\frac{1}{a_i}\right)^{j-1} \frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} \left[(1-a_i z)^{m_i} \frac{N(z)}{D(z)} \right] \Bigg|_{z=\frac{1}{a_i}},$$

όπου, εξ ορισμού, $0! \triangleq 1$, $\frac{d^0}{dz^0} f(z) \triangleq f(z)$, $\frac{d^1}{dz^1} f(z) \triangleq f'(z)$, ...

Παράδειγμα.

$$F(z) = \frac{z^2(1-z)}{(1-4z)(1-2z)^2}$$

Έχουμε, παραλείποντας προς στιγμήν το z^2

$$\frac{1-z}{(1-4z)(1-2z)^2} = \frac{A_{11}}{1-4z} + \frac{A_{21}}{(1-2z)^2} + \frac{A_{22}}{1-2z}$$

$$A_{11} = \frac{1}{0!} \left(-\frac{1}{4}\right)^0 \frac{d^0}{dz^0} \left[(1-4z) \frac{1-z}{(1-4z)(1-2z)^2} \right] \Bigg|_{z=1/4} = \frac{1-z}{(1-2z)^2} \Bigg|_{z=1/4} = 3,$$

$$A_{21} = \frac{1}{0!} \left(-\frac{1}{2}\right)^0 \frac{d^0}{dz^0} \left[(1-2z)^2 \frac{1-z}{(1-4z)(1-2z)^2} \right] \Bigg|_{z=1/2} = \frac{1-z}{1-4z} \Bigg|_{z=1/2} = -\frac{1}{2}$$

$$A_{22} = \frac{1}{1!} \left(-\frac{1}{2}\right)^1 \frac{d^1}{dz^1} \left[(1-2z)^2 \frac{1-z}{(1-2z)^2(1-4z)} \right] \Bigg|_{z=1/2} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left[\frac{1-z}{1-4z} \right] \Bigg|_{z=1/2} = -\frac{3}{2}.$$

Παραλείψαμε το z^2 επειδή η μέθοδος ισχύει εφ' όσον ο βαθμός του πολωνύμου $N(z)$

είναι μικρότερος του βαθμού του $D(z)$ και επειδή ο όρος z^2 στο μετασχηματισμό z μπορεί να ληφθεί υπ' όψιν αργότερα όπως θα δούμε. Αν δεν ισχύει αυτό τότε, εν γένει, διαιρούμε το $N(z)$ δια του $D(z)$ και προκύπτει $N(z)/D(z) = \pi(z) + [v(z)/D(z)]$, όπου $\text{βαθμός}(v) < \text{βαθμός}(D)$, και αντιστρέφουμε τους όρους $\pi(z)$ και $[v(z)/D(z)]$ ξεχωριστά. Επιστρέφουμε στην έκφραση που υπολογίσαμε προηγουμένως και από τον Πίνακα III.2 έχουμε:

$$\frac{1-z}{(1-4z)(1-2z)^2} = \frac{3}{1-4z} + \frac{-1/2}{(1-2z)^2} + \frac{-3/2}{1-2z} \Leftrightarrow$$

$$3(4)^n - \frac{3}{2}(2)^n - \frac{1}{2}(n+1)(2)^n, \quad n = 0, 1, \dots$$

Τώρα λαμβάνουμε υπ' όψιν και τον όρο z^2 . Από την Ιδιότητα 8 του Πίνακα III.1, έχουμε ότι $z^k F(z) \leftrightarrow f_{n-k}$, $k > 0$, άρα η πλήρης συνάρτηση με το z^2 αντιστοιχεί στο

$$3(4)^{n-2} - \frac{3}{2}(2)^{n-2} - \frac{1}{2}(n-1)(2)^{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Στη συνέχεια εξετάζουμε την εφαρμογή του μετασχηματισμού z στη λύση εξισώσεων διαφοράς. Έστω η εξίσωση

$$C_n f(k+n) + C_{n-1} f(k+n-1) + \dots + C_0 f(k) = g(k) \quad (3.2.4)$$

όπου τα C_i είναι σταθερές, η $g(k)$ είναι δεδομένη συνάρτηση, και έχουν δοθεί οι οριακές συνθήκες. Ορίζουμε το μετασχηματισμό z της f

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^k.$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (3.2.4) επί z^k για $k = 0, 1, 2, \dots$ και έχουμε

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n C_i f(k+i)z^k = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)z^k$$

από την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε την $F(z)$ και κατόπιν την $f(k)$ με τον αντίστροφο μετασχηματισμό.

Παράδειγμα.

$$6f(k) - 5f(k-1) + f(k-2) = 6\left(\frac{1}{5}\right)^k, \quad k = 2, 3, \dots$$

$$\Rightarrow 6 \sum_{k=2}^{\infty} f(k)z^k - 5z \sum_{k=2}^{\infty} f(k-1)z^{k-1} + z^2 \sum_{k=2}^{\infty} f(k-2)z^{k-2} = 6 \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k z^k .$$

Έστω ότι οι αρχικές συνθήκες είναι $f(0) = 0$, $f(1) = \frac{6}{5}$. Τότε

$$6[F(z) - f(0) - zf(1)] - 5z[F(z) - f(0)] + z^2 F(z) = 6 \frac{(1/5)^2 z^2}{1 - z/5}$$

$$\Rightarrow 6 \left[F(z) - \frac{6}{5}z \right] - 5zF(z) + z^2 F(z) = \frac{6(1/5)^2 z^2}{1 - z/5}$$

$$\Rightarrow F(z) = \frac{1}{5} \frac{z(6-z)}{\left(1 - \frac{z}{3}\right)\left(1 - \frac{z}{2}\right)\left(1 - \frac{z}{5}\right)}$$

και μετά τη διάσπαση σε κλάσματα

$$F(z) = \frac{-9}{1 - \frac{z}{3}} + \frac{8}{1 - \frac{z}{2}} + \frac{1}{1 - \frac{z}{5}} .$$

Από τους πίνακες αντιστρέφουμε:

$$f(k) = -9\left(\frac{1}{3}\right)^k + 8\left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(\frac{1}{5}\right)^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Μετά αυτή την παρένθεση είμαστε έτοιμοι να προχωρήσουμε με το ακόλουθο σύστημα αναμονής.

Πίνακας III.1 Μερικές ιδιότητες του μετασχηματισμού z

Ακολουθία \Leftrightarrow	Μετασχηματισμός z
1. $f_n \quad n = 0, 1, 2, \dots$	$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$
2. $af_n + bg_n$	$aF(z) + bG(z)$
3. $a^n f_n$	$F(az)$
4. $f_{n/k} \quad n = 0, k, 2k, \dots$	$F(z^k)$
5. f_{n+1}	$\frac{1}{z}[F(z) - f_0]$
6. $f_{n+k} \quad k > 0$	$\frac{F(z)}{z^k} - \sum_{i=1}^k z^{i-k-1} f_{i-1}$
7. f_{n-1}	$zF(z)$
8. $f_{n-k} \quad k > 0$	$z^k F(z)$
9. nf_n	$z \frac{d}{dz} F(z)$
10. $n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)f_n$	$z^m \frac{d^m}{dz^m} F(z)$
11. $f_n \otimes g_n$	$F(z)G(z)$
12. $f_n - f_{n-1}$	$(1-z)F(z)$
13. $\sum_{k=0}^n f_k \quad n = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{F(z)}{1-z}$
14. $\frac{\partial}{\partial a} f_n$ (όπου a παράμετρος της f_n)	$\frac{\partial}{\partial a} F(z)$
15. Ιδιότητα αθροίσματος σειράς	$F(1) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$
16. Εναλλακτική ιδιότητα αθροίσματος	$F(-1) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_n$
17. Θεώρημα αρχικής τιμής	$F(0) = f_0$
18. Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής	$\left. \frac{1}{n!} \frac{d^n F(z)}{dz^n} \right _{z=0} = f_n$
19. Θεώρημα τελικής τιμής	$\lim_{z \rightarrow 1} (1-z)F(z) = f_{\infty}$

Πίνακας III.2 Κάποια ζευγάρια μετασχηματισμού z

Ακολουθία \Leftrightarrow	Μετασχηματισμός z
1. $f_n \quad n = 0, 1, 2, \dots$	$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$
2. $u_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$	1
3. u_{n-k}	z^k
4. $\delta_n = 1 \quad n = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{1}{1-z}$
5. δ_{n-k}	$\frac{z^k}{1-z}$
6. Aa^n	$\frac{A}{1-az}$
7. na^n	$\frac{az}{(1-az)^2}$
8. n	$\frac{z}{(1-z)^2}$
9. $n^2 a^n$	$\frac{az(1+az)}{(1-az)^3}$
10. n^2	$\frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$
11. $(n+1)a^n$	$\frac{1}{(1-az)^2}$
12. $(n+1)$	$\frac{1}{(1-z)^2}$
13. $\frac{1}{m!}(n+m)(n+m-1)\dots(n+1)a^n$	$\frac{1}{(1-az)^{m+1}}$
14. $\frac{1}{n!}$	e^z

3.3 Η Ουρά $M/E_n/1$

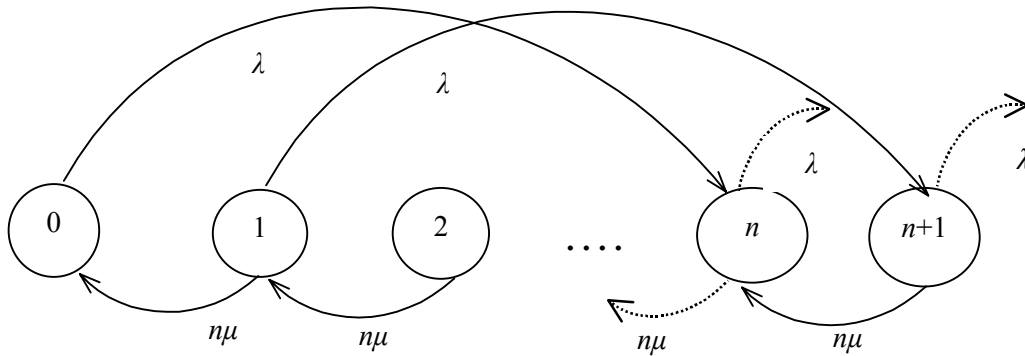
Εδώ υποθέτουμε ότι οι αφίξεις είναι Poisson και οι χρόνοι αφίξεων είναι εκθετικοί:

$$f_a(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

ενώ οι αναχωρήσεις είναι Erlang- n

$$f_s(x) = \frac{n\mu(n\mu x)^{n-1} e^{-n\mu x}}{(n-1)!}, \quad x \geq 0$$

και το διάγραμμα είναι



Σχήμα 3.6. Σύστημα $M/E_n/1$

Αυτό το διάγραμμα μας λέει ότι ο πρώτος πελάτης εξυπηρετείται μετά από n βαθμίδες καθώς και ο δεύτερος κ.ο.κ. Έστω τώρα ότι υπάρχουν k πελάτες στο σύστημα και ο πρώτος πελάτης έχει τελειώσει τις $m-1$ βαθμίδες εξυπηρέτησης και βρίσκεται στη βαθμίδα m ενώ οι άλλοι είναι στην ουρά. Τότε ο συνολικός αριθμός βαθμίδων εξυπηρέτησης που απομένουν είναι:

$$\begin{aligned} i &= [\text{βαθμίδες πελατών στην ουρά}] + [\text{υπόλοιπες του πελάτη που εξυπηρετείται}] \\ &= [(k-1)n] + [n - (m-1)] = kn - m + 1. \end{aligned}$$

Έστω τώρα P_k η πιθανότητα μόνιμης κατάστασης να έχουμε k πελάτες στο σύστημα και

$$\pi_i \triangleq P(\text{απομένουν } i \text{ βαθμίδες εξυπηρέτησης στο σύστημα})$$

Τότε

$$P_k = \sum_{i=(k-1)n+1}^{kn} \pi_i, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.3.1)$$

Έτσι αν υπολογίσουμε τις πιθανότητες π_i μπορούμε από την (3.3.1) να υπολογίσουμε τις P_k . Τώρα από το διάγραμμα εύκολα ευρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \lambda\pi_0 &= n\mu\pi_1 \\ (\lambda + n\mu)\pi_i &= n\mu\pi_{i+1}, & i = 1, 2, \dots, n-1 \\ (\lambda + n\mu)\pi_i &= \lambda\pi_{i-n} + n\mu\pi_{i+1}, & i = n, n+1, \dots \\ \pi_i &= 0 & \text{για } i < 0. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Θα λύσουμε την (3.3.2) με τη βοήθεια του μετασχηματισμού z . Ορίζουμε

$$\Pi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i z^i.$$

Πολλαπλασιάζουμε τις εξισώσεις διαφοράς επί z^i και αθροίζουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda + n\mu)\pi_i z^i &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda\pi_{i-n} z^i + \sum_{i=1}^{\infty} n\mu\pi_{i+1} z^i \\ \Rightarrow (\lambda + n\mu) \left(\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i z^i - \pi_0 \right) &= \lambda z^n \sum_{i=1}^{\infty} \pi_{i-n} z^{i-n} + n\mu z^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} \pi_{i+1} z^{i+1} \\ \Rightarrow (\lambda + n\mu) [\Pi(z) - \pi_0] &= \lambda z^n \Pi(z) + \frac{n\mu}{z} [\Pi(z) - \pi_0 - \pi_1 z] \end{aligned}$$

και μετά από λίγη άλγεβρα

$$\Pi(z) = \frac{\pi_0 \left(\lambda + n\mu - \frac{n\mu}{z} \right) - n\mu\pi_1}{\lambda + n\mu - \lambda z^n - \frac{n\mu}{z}}.$$

Αλλά $\lambda\pi_0 = n\mu\pi_1$, άρα

$$\Pi(z) = \frac{n\mu\pi_0 \left(1 - \frac{1}{z} \right)}{\lambda + n\mu - \lambda z^n - \frac{n\mu}{z}} = \frac{n\mu\pi_0(1-z)}{n\mu + \lambda z^{n+1} - (\lambda + n\mu)z}. \quad (3.3.3)$$

Παρατηρούμε ότι $\Pi(1) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i z_i \Big|_{z=1} = 1$, αλλά από την (3.3.3) και

χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hôpital για το κλάσμα $\Pi(z) = N(z)/D(z)$ στο $z = 1$,

$$\Pi(1) = \frac{N'(1)}{D'(1)} = \frac{n\mu\pi_0}{n\mu - \lambda n} = \frac{n\mu P_0}{n\mu - \lambda n}$$

αφού $\pi_0 = P_0$ προφανώς. Τότε

$$\frac{n\mu P_0}{n(\mu - \lambda)} = 1 \Rightarrow P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}.$$

Ορίζουμε $\rho \triangleq \lambda/\mu$ και η (3.3.3) γίνεται:

$$\Pi(z) = \frac{n\mu(1-\rho)(1-z)}{n\mu + \lambda z^{n+1} - (\lambda + n\mu)z}. \quad (3.3.4)$$

Το επόμενο στάδιο είναι να **αντιστρέψουμε το μετασχηματισμό** για να υπολογίσουμε τις π_i και από αυτές τις P_k από την (3.3.1). Πρώτα ευρίσκομε τις ρίζες του παρονομαστή για να τον κάνουμε γινόμενο. Μία ρίζα είναι το 1. Τότε ο παρονομαστής γίνεται

$$(1-z)[n\mu - \lambda(z + z^2 + \dots + z^n)].$$

Έστω τώρα ότι το πολυώνυμο βαθμού n έχει n ρίζες z_1, \dots, z_n , τότε μπορεί να πάρει τη μορφή

$$n\mu(1-z)(1-z/z_1)\dots(1-z/z_n)$$

και άρα

$$\Pi(z) = \frac{1-\rho}{\left(1-\frac{z}{z_1}\right)\left(1-\frac{z}{z_2}\right)\dots\left(1-\frac{z}{z_n}\right)} = (1-\rho) \sum_{j=1}^n \frac{A_j}{1-\frac{z}{z_j}}, \quad \text{όπου } A_j = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{1}{1-\frac{z_j}{z_i}}$$

Αντιστρέφοντας

$$\left. \begin{aligned} \pi_i &= (1-\rho) \sum_{j=1}^n \frac{A_j}{z_j^i}, \quad i = 1, 2, \dots \\ \text{και } \pi_0 &= 1-\rho \end{aligned} \right\} \quad (3.3.5)$$

Η κατανομή (3.3.5) είναι άθροισμα γεωμετρικών κατανομών.

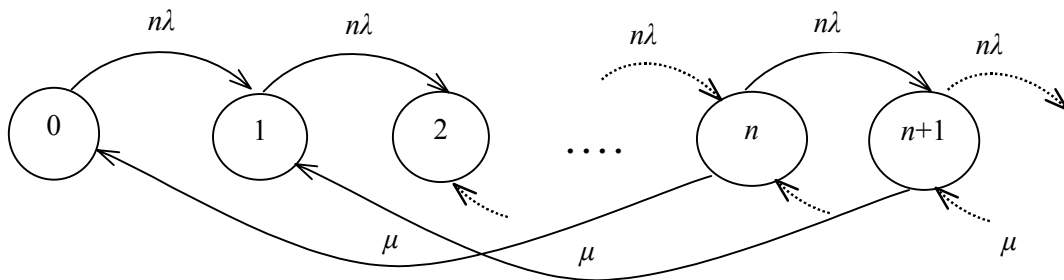
3.4 Η Ουρά $E_n/M/1$

Εδώ έχουμε την αντίστροφη περίπτωση της προηγούμενης ενότητας.

$$f_a(t) = \frac{n\lambda(n\lambda t)^{n-1} e^{-n\lambda t}}{(n-1)!}, \quad t \geq 0 \quad (3.4.1)$$

$$f_s(x) = \mu e^{-\mu x}, \quad x \geq 0. \quad (3.4.2)$$

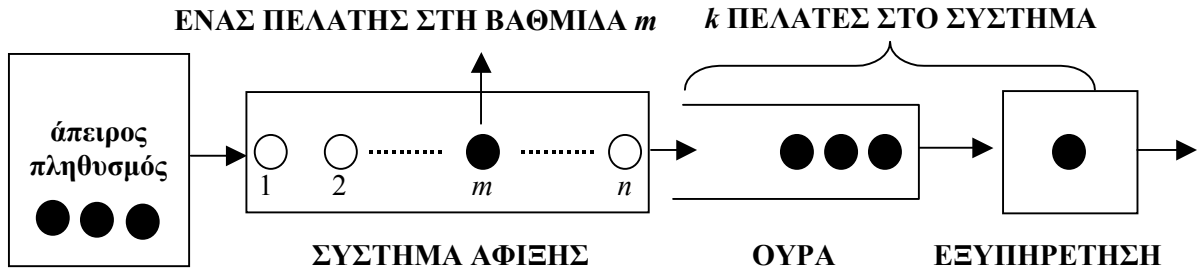
Το διάγραμμα είναι



Σχήμα 3.7. Σύστημα $E_n/M/1$

Πρέπει να γίνει κατανοητό ότι τα διαγράμματα αυτής και της προηγούμενης ενότητας είναι ευφείς τρόποι παρουσίασης της κατανομής Erlang και οφείλονται στον ίδιο τον Erlang. Εδώ υποθέτουμε ότι ένας πελάτης προκειμένου να φθάσει στο σύστημα περνάει από n βαθμίδες άφιξης με ρυθμό $n\lambda$. Ο συνολικός χρόνος στις n βαθμίδες έχει την κατανομή (3.4.1). Ο πρώτος πελάτης διασχίζει n βαθμίδες άφιξης. Μόλις φθάσει στη βαθμίδα n τότε και μόνο τότε αρχίζει η εξυπηρέτησή του. Το σύστημα ευρίσκεται στην κατάσταση n . Από την κατάσταση αυτή δύο πράγματα μπορεί να συμβούν: Είτε ο πρώτος πελάτης εξυπηρετείται, οπότε το σύστημα μεταβαίνει στην κατάσταση 0, είτε ένας νέος πελάτης θα καταλάβει την πρώτη βαθμίδα άφιξης του, οπότε το σύστημα μεταβαίνει στην κατάσταση $n+1$. Για να αρχίσει η εξυπηρέτηση του νέου πελάτη πρέπει να έχει διαχίσει τις n βαθμίδες άφιξης και να έχει εξυπηρετηθεί ο προηγούμενος. Αν η βαθμίδα εξυπηρέτησης είναι κενή εξυπηρετείται, αλλιώς περιμένει κ.ο.κ.

Σαν κατάσταση τώρα παίρνουμε όλες τις βαθμίδες άφιξης στο σύστημα που ήδη έχουν συμπληρωθεί. Αν υπάρχουν k πελάτες στο σύστημα και ο αφικνούμενος πελάτης βρίσκεται στη βαθμίδα άφιξης m , τότε έχουν συμπληρωθεί $i = kn + m$ βαθμίδες. Η περίπτωση αυτή περιγράφεται στο επόμενο σχήμα:



Ορίζουμε

$$\pi_i = P[i \text{ βαθμίδες άφιξης έχουν συμπληρωθεί}],$$

τότε

$$P_k = P[k \text{ πελάτες στο σύστημα}] = \sum_{i=kn}^{(k+1)n-1} \pi_i .$$

Προχωρούμε όπως και προηγουμένως και διατυπώνουμε τις εξισώσεις για τις π_i

$$n\lambda\pi_0 = \mu\pi_n \quad (3.4.3)$$

$$n\lambda\pi_i = n\lambda\pi_{i-1} + \mu\pi_{n+i}, \quad 1 \leq i \leq n-1 \quad (3.4.4)$$

$$(n\lambda + \mu)\pi_i = n\lambda\pi_{i-1} + \mu\pi_{n+i}, \quad n \leq i \quad (3.4.5)$$

Ο μετασχηματισμός z ορίζεται

$$\Pi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i z^i .$$

Οι (3.4.4) και (3.4.5) μπορούν να γραφούν αφού πολλαπλασιασθούν επί z^i

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} (\mu + n\lambda)\pi_i z^i - \sum_{i=1}^{n-1} \mu\pi_i z^i &= \sum_{i=1}^{\infty} n\lambda\pi_{i-1} z^i + \sum_{i=1}^{\infty} \mu\pi_{n+i} z^i \\ &= (\mu + n\lambda)[\Pi(z) - \pi_0] - \sum_{i=1}^{n-1} \mu\pi_i z^i = n\lambda z \Pi(z) + \frac{\mu}{z^n} \left[\Pi(z) - \sum_{i=0}^n \pi_i z^i \right] \\ &= n\lambda z \Pi(z) + \frac{\mu}{z^n} \left[\Pi(z) - \sum_{i=0}^{n-1} \pi_i z^i - \pi_n z^n \right]. \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

Αλλά από την (3.4.3)

$$\pi_n = \frac{n\lambda\pi_0}{\mu}. \quad (3.4.7)$$

Αντικαθιστούμε την (3.4.7) στην (3.4.6)

$$\Pi(z) = \frac{(1-z^n) \sum_{i=0}^{n-1} \pi_i z^i}{n \frac{\lambda}{\mu} z^{n+1} - (1+n \frac{\lambda}{\mu}) z^n + 1} = \frac{(1-z^n) \sum_{i=0}^{n-1} \pi_i z^i}{n \rho z^{n+1} - (1+n\rho) z^n + 1} \quad (3.4.8)$$

όπου πάλι $\rho \triangleq \frac{\lambda}{\mu}$.

Ο παρονομαστής της (3.4.8) έχει μία ρίζα =1. Μπορεί ν' αποδειχθεί ότι υπάρχουν ακόμη n ρίζες εκ των οποίων οι $n-1$ ικανοποιούν $|z_i| < 1$ ενώ υπάρχει μία $z_0 > 1$. Πάλι μπορεί ν' αποδειχθεί ότι η (3.4.8) παίρνει τη μορφή

$$\Pi(z) = \frac{(1-z^n) \left(1 - \frac{1}{z_0}\right)}{n(1-z) \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)} = (1-z^n) \left(\frac{\frac{1}{n}}{1-z} + \frac{\frac{-1}{nz_0}}{1 - \frac{z}{z_0}} \right)$$

Ο όρος μέσα στη δεύτερη παρένθεση έχει αντίστροφο μετασχηματισμό

$$f_i = \frac{1}{n} - \frac{1}{nz_0} z_0^{-1} = \frac{1}{n} (1 - z_0^{-i-1}), \quad i > 0$$

ενώ πολλαπλασιασμός επί $(1-z^n)$ δίνει

$$\pi_i = f_i - f_{i-n} = \frac{1}{n} (1 - z_0^{-i-1} - 1 + z_0^{-i+n-1}) = \frac{1}{n} z_0^{n-i-1} (1 - z_0^{-n}). \quad (3.4.9)$$

Παρατηρούμε ότι

$$f_{i-n} \begin{cases} = 0 & \text{για } i-n < 0, \\ \neq 0 & \text{για } i-n \geq 0. \end{cases}$$

Ο παρονομαστής στην (3.4.8) είναι 0 για $z = z_0$, άρα

$$n\rho z_0^{n+1} - (1+n\rho)z_0^n + 1 = 0, \quad \text{ή}$$

$$n\rho z_0^n (z_0 - 1) = z_0^n - 1,$$

ή

$$n\rho(z_0 - 1) = 1 - z_0^{-n}. \quad (3.4.10)$$

Από τις (3.4.9) και (3.4.10) ευρίσκουμε

$$\pi_i = \rho (z_0 - 1) z_0^{n-i-1} \quad \text{για } i \geq n \quad (3.4.11)$$

ενώ για $i < n, f_{i-n} = 0$ και

$$\pi_i = \frac{1}{n}(1 - z_0^{-i-1}). \quad (3.4.12)$$

Μετά από λίγη άλγεβρα

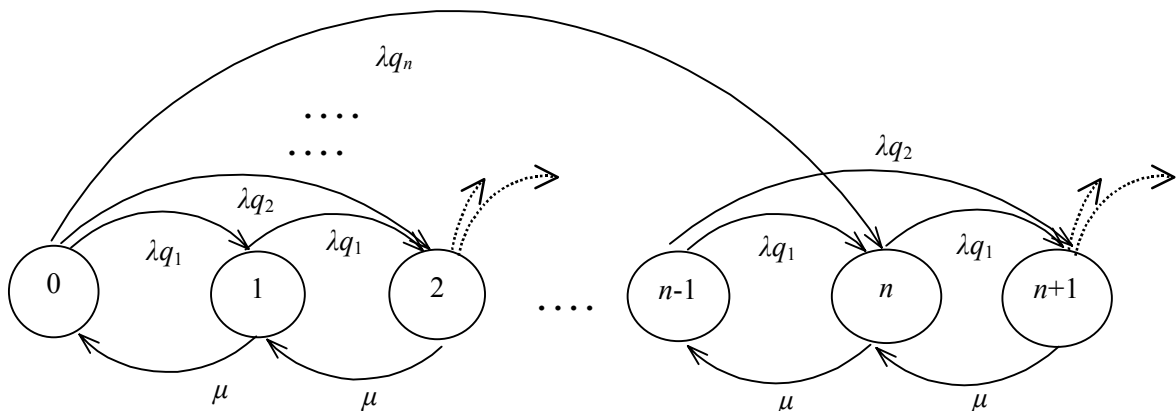
$$P_k = \begin{cases} 1 - \rho & \text{για } k = 0 \\ \rho (z_0^n - 1) z_0^{-nk} & \text{για } k > 0 \end{cases} \quad (3.4.13)$$

που είναι επίσης μορφή γεωμετρικής κατανομής.

3.5 Ομαδικές Αφίξεις

(Bulk arrivals)

Το σύστημα $M/E_n/1$ που ήδη εξετάσαμε μπορεί να θεωρηθεί ισοδύναμο του εξής συστήματος: έχουμε n πελάτες που φθάνουν την ίδια στιγμή και θα εξυπηρετηθούν από μία εκθετική βαθμίδα. Το νέο αυτό σύστημα είναι $M/M/1$ με ομαδικές αφίξεις μεγέθους n και είναι ισοδύναμο του $M/E_n/1$. Το διάγραμμα κατάστασης είναι



Σχήμα 3.8. Ομαδικές αφίξεις

Έστω τώρα ότι το μέγεθος των αφίξεων δεν είναι n αλλά γενικότερο. Οι στιγμές των ομαδικών αφίξεων είναι Poisson και το μέγεθος των ομάδων ορίζεται από την πιθανότητα

$$q_k = P[\text{μέγεθος ομάδας } k].$$

Τέτοιες αφίξεις συμβαίνουν σε εστιατόρια ή συστήματα παραγωγής όταν γίνονται εκφορτώσεις κ.ο.κ. Ο ρυθμός άφιξης των ομάδων είναι λ .

Οι εξισώσεις για τις πιθανότητες P_n είναι

$$P_0 \lambda \sum_{i=1}^{\infty} q_i = \mu P_1 \quad \text{ή} \quad \lambda P_0 = \mu P_1 \quad (3.5.1)$$

$$P_n (\mu + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} q_i) = \mu P_{n+1} + \lambda \sum_{i=0}^{n-1} P_i q_{n-i}$$

$$\text{ή } (\lambda + \mu) P_n = \mu P_{n+1} + \lambda \sum_{i=0}^{n-1} P_i q_{n-i}, \quad n \geq 1. \quad (3.5.2)$$

Η κατάσταση του συστήματος είναι ο αριθμός πελατών στο σύστημα. Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό z στην (3.5.2).

$$(\lambda + \mu) \sum_{n=1}^{\infty} P_n z^n = \frac{\mu}{z} \sum_{n=1}^{\infty} P_{n+1} z^{n+1} + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} P_i q_{n-i} z^n. \quad (3.5.3)$$

Ο τελευταίος όρος αυτής της εξίσωσης γράφεται:

$$\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} P_i q_{n-i} z^n = \lambda \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=i+1}^{\infty} P_i q_{n-i} z^n = \lambda \sum_{i=0}^{\infty} P_i z^i \sum_{n=i+1}^{\infty} q_{n-i} z^{n-i}.$$

Η (3.5.3) γίνεται

$$(\lambda + \mu)[P(z) - P_0] = \frac{\mu}{z} [P(z) - P_1 z - P_0] + \lambda P(z) Q(z) \quad (3.5.4)$$

όπου $Q(z) \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} q_n z^n$. Αντικαθιστούμε την P_1 από την (3.5.1) στην (3.5.4) και

ευρίσκομε

$$P(z) = \frac{\mu P_0 (1-z)}{\mu(1-z) - \lambda z [1-Q(z)]}. \quad (3.5.5)$$

Όπως και προηγουμένως $P(1) = 1$ και παίρνοντας παραγώγους στον αριθμητή και παρονομαστή της (3.5.5) ευρίσκομε

$$\frac{-\mu P_0}{-\mu - \lambda + \lambda Q(1) + \lambda Q'(1)} = 1 \Rightarrow P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} Q'(1)$$

και ορίζοντας $\rho = \frac{\lambda}{\mu} Q'(1)$, $P_0 = 1 - \rho$, τελικά η (3.5.5) γίνεται

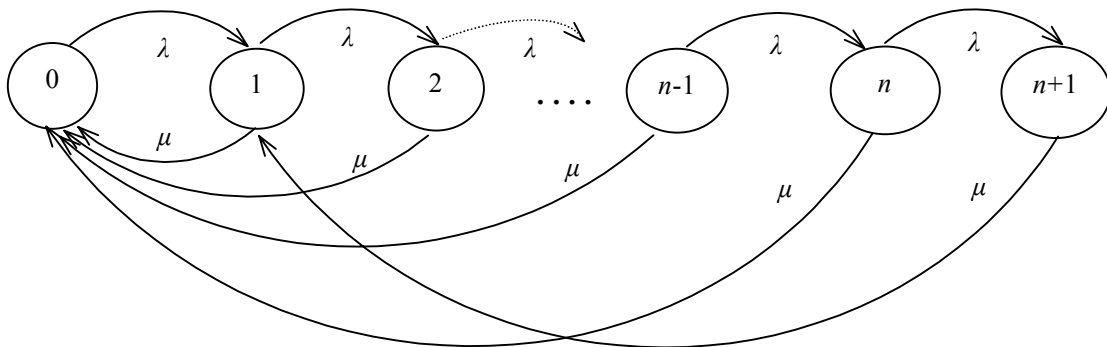
$$P(z) = \frac{\mu(1-\rho)(1-z)}{\mu(1-z) - \lambda z[1-Q(z)]}. \quad (3.5.6)$$

Εφ' όσον δοθεί η κατανομή q_n τότε υπολογίζουμε την $Q(z)$ και μετά αντιστρέφουμε την (3.5.6).

3.6 Ομαδικές εξυπηρετήσεις

(Bulk service)

Εξετάζουμε τώρα την ακριβώς δυαδική περίπτωση της προηγούμενης. Η βαθμίδα εξυπηρέτησης, μόλις ελευθερωθεί, δέχεται ομαδικά n πελάτες για εξυπηρέτηση (όπως τα καροτσάκια που μεταφέρουν προϊόντα σ' ένα σύστημα παραγωγής). Αν οι αφιχθέντες πελάτες είναι λιγότεροι από n , τότε ο εξυπηρετών περιμένει να γίνουν n . Έχουμε λοιπόν ένα σύστημα $M/M/1$ με ομαδικές εξυπηρετήσεις που είναι ακριβώς ισοδύναμο του $E_n/M/1$.



Σχήμα 3.9. Ομαδικές εξυπηρετήσεις

Για να θεωρήσουμε μια γενικότερη περίπτωση ας υποθέσουμε ότι, αν οι πελάτες είναι λιγότεροι από n , πάλι το σύστημα τους αποδέχεται.

Η κατάσταση του συστήματος είναι ο αριθμός πελατών στο σύστημα. Οι αφίξεις

γίνονται με ρυθμό λ και οι εξυπηρετήσεις μεγέθους από 1 έως n με ρυθμό μ . Οι εξισώσεις είναι:

$$(\lambda + \mu)P_k = \lambda P_{k-1} + \mu P_{k+n}, \quad k \geq 1 \quad (3.6.1)$$

$$\lambda P_0 = \mu(P_1 + P_2 + \dots + P_n). \quad (3.6.2)$$

Παίρνουμε μετασχηματισμό z

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \sum_{k=1}^{\infty} P_k z^k &= \lambda z \sum_{k=1}^{\infty} P_{k-1} z^{k-1} + \mu \sum_{k=1}^{\infty} P_{k+n} z^k \\ \Rightarrow (\lambda + \mu)[P(z) - P_0] &= \lambda z P(z) + \frac{\mu}{z^n} [P(z) - \sum_{k=0}^n P_k z^k] \end{aligned}$$

απ' όπου

$$P(z) = \frac{\mu \sum_{k=0}^n P_k z^k - (\lambda + \mu) P_0 z^n}{\lambda z^{n+1} - (\lambda + \mu) z^n + \mu}. \quad (3.6.3)$$

Η (3.6.2) δίνει

$$-\lambda P_0 - \mu P_0 = -\mu \sum_{k=0}^n P_k. \quad (3.6.4)$$

Αντικαθιστούμε την (3.6.4) στην (3.6.3)

$$P(z) = \frac{\mu \sum_{k=0}^n P_k z^k - \mu z^n \sum_{k=0}^n P_k}{\lambda z^{n+1} - (\lambda + \mu) z^n + \mu}$$

και με $\rho \triangleq \frac{\lambda}{n\mu}$

$$P(z) = \frac{\sum_{k=0}^n P_k (z^k - z^n)}{n\rho z^{n+1} - (1 + n\rho) z^n + 1}. \quad (3.6.5)$$

Ο παρονομαστής της (3.6.5) είναι ακριβώς ίδιος μ' εκείνον της (3.4.8) και άρα έχει μια ρίζα $|z_0| > 1$ και $n-1$ ρίζες $|z| < 1$.

Υπάρχει ένα θεώρημα που μας λέει ότι η $P(z)$ πρέπει να είναι φραγμένη στην περιοχή $|z| < 1$ και άρα οι $n-1$ ρίζες του παρονομαστή που είναι < 1 πρέπει να διαγραφούν

από αντίστοιχες ρίζες του αριθμητή, δηλαδή

$$\frac{\sum_{k=0}^n P_k (z^k - z^n)}{n\rho z^{n+1} - (1+n\rho)z^n + 1} = \frac{A(1-z)}{(1-z)\left(1 - \frac{z}{z_0}\right)}$$

όπου το A είναι μια σταθερά αναλογίας και το $(1-z)$ προκύπτει από το γεγονός ότι $z=1$ είναι ρίζα και του αριθμητή και του παρονομαστή. Άρα

$$P(z) = \frac{A}{1 - \frac{z}{z_0}},$$

όπου, επειδή $P(1) = 1$, $A = 1 - \frac{1}{z_0}$. Οπότε

$$P(z) = \frac{1 - \frac{1}{z_0}}{1 - \frac{z}{z_0}}$$

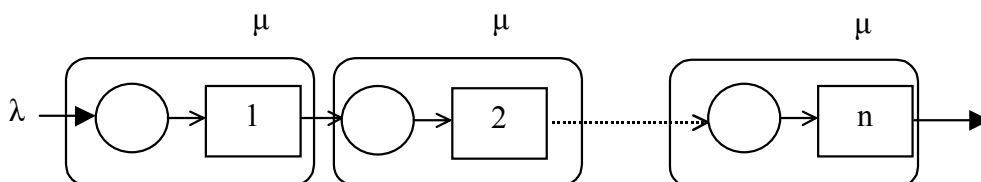
και αντιστρέφοντας (Πίνακας III.2, 6)

$$P_k = \left(1 - \frac{1}{z_0}\right) \left(\frac{1}{z_0}\right)^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

που πάλι είναι γεωμετρική κατανομή.

3.7 Δίκτυα Αναμονητικών Συστημάτων

Θεωρούμε την ακόλουθη σύνδεση εν σειρά αναμονητικών συστημάτων



Σχήμα 3.10. Σειριακό σύστημα

Το σύστημα 1 είναι $M/M/1$ με παραμέτρους λ και μ . Το σύστημα 2 έχει έναν εξυπηρετούντα με εκθετική κατανομή και ρυθμό εξόδου μ . Το ίδιο ισχύει για τους υπόλοιπους κόμβους. Η πυκνότητα των χρόνων αναχώρησης στην έξοδο του 1 είναι $b(x)$ και ο μετασχηματισμός Laplace* της $b(x)$ είναι $B(s)$. Όταν ένας πελάτης αφήσει τον κόμβο 1 πηγαίνει στην ουρά του κόμβου 2. Αν τώρα στην ουρά του 1 υπάρχει διαθέσιμος για εξυπηρέτηση πελάτης, τότε η κατανομή των χρόνων εξόδου είναι εκθετική ή

$$B_1(s) = \frac{\mu}{s + \mu}.$$

Αν όμως δεν υπάρχει πελάτης έτοιμος, τότε ο χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα στην αναχώρηση του τωρινού και του επόμενου πελάτη ισούται με το χρόνο που μεσολαβεί ανάμεσα στην αναχώρηση του τωρινού και την άφιξη του επόμενου συν το χρόνο εξυπηρέτησης του επόμενου. Οι δύο χρόνοι είναι ανεξάρτητοι και το άθροισμά τους έχει πυκνότητα που ισούται με τη συνέλιξη των δύο πυκνοτήτων. Άρα

$$B_2(s) = \frac{\lambda}{s + \lambda} \frac{\mu}{s + \mu}$$

επειδή ο χρόνος άφιξης είναι επίσης εκθετικός με ρυθμό λ .

Η πιθανότητα να είναι η ουρά του 1 άδεια είναι, όπως είδαμε από την ουρά $M/M/1$

$$P_0 = 1 - \rho,$$

επομένως

$$B(s) = (1 - \rho) \frac{\lambda}{s + \lambda} \frac{\mu}{s + \mu} + \rho \frac{\mu}{s + \mu} = \frac{\lambda}{s + \lambda}. \quad (3.7.1)$$

Αλλά η (3.7.1) είναι η εκθετική κατανομή με ρυθμό λ . Άρα

στην είσοδο του 2 έχουμε πάλι μια διαδικασία Poisson με παράμετρο λ !

Το εκπληκτικό αποτέλεσμα λέγεται **Θεώρημα του Burke**.

* Ορισμός μετασχηματισμού: $b(x) \leftrightarrow B(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} b(x) dx$. Ιδιότητα συνέλιξης: $a(x) \otimes b(x) \leftrightarrow A(s)B(s)$.

Το ίδιο θεώρημα μας λέει ότι το σύστημα $M/M/m$ με ρυθμό εισόδου λ και παράμετρο μ για κάθε εξυπηρετούντα έχει έξοδο που είναι Poisson με ρυθμό λ και αυτό είναι το μόνο σύστημα FCFS (first come first served), που έχει αυτή την ιδιότητα. Πάντα βέβαια μιλάμε για ευσταθή συστήματα σε μόνιμη κατάσταση. Τελικά η έξοδος των n κόμβων εν σειρά είναι Poisson με παράμετρο λ .

Εξετάζουμε τώρα **δίκτυα Jackson**. Πρόκειται για δίκτυα αυθαίρετης γεωμετρίας με n κόμβους. Ο i -οστός κόμβος συνίσταται από μίαν ουρά άπειρης χωρητικότητας και m_i εκθετικούς εξυπηρετούντες με ρυθμό μ_i ο καθένας. Σε κάθε κόμβο φθάνουν πελάτες απ' έξω απ' το σύστημα κατά Poisson με ρυθμό γ_i και πελάτες από άλλους κόμβους. Ένας πελάτης μόλις εξυπηρετηθεί στον κόμβο i αναχωρεί για τον κόμβο j με πιθανότητα P_{ij} και άρα εγκαταλείπει όλο το δίκτυο με πιθανότητα

$$1 - P(\text{να πάει κάπου μέσα στο δίκτυο}) = 1 - \sum_{j=1}^n P_{ij}.$$

Ο συνολικός ρυθμός άφιξης στον κόμβο i είναι

$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^n \lambda_j P_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.7.2)$$

Για να έχει το σύστημα μόνιμη κατάσταση πρέπει

$$\lambda_i < m_i \mu_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Σαν κατάσταση στο σύστημα θα πάρουμε το διάνυσμα

$$\mathbf{K} \triangleq [K_1, K_2, \dots, K_n]$$

όπου K_i είναι ο αριθμός πελατών που βρίσκονται στην ουρά του κόμβου i συν τον αριθμό των εξυπηρετουμένων. Η κοινή πιθανότητα στη μόνιμη κατάσταση είναι

$$P(K_1, K_2, \dots, K_n) \triangleq P(\mathbf{K})$$

και η πιθανότητα μόνιμης κατάστασης για κάθε κατάσταση $P_i(K_i)$. Ο Jackson απέδειξε το ακόλουθο εκπληκτικό

Θεώρημα Jackson:

- α. Κάθε κόμβος i συμπεριφέρεται σαν αναμονητικό σύστημα $M/M/m_i$ με μέσο ρυθμό εισόδου (3.7.2).

β. Η συνολική είσοδος σε έναν κόμβο **δεν** είναι Poisson.

γ.
$$P(\mathbf{K}) = \prod_{i=1}^n P_i(K_i) \quad (3.7.3)$$

όπου οι πιθανότητες $P_i(K_i)$ δίνονται από εξισώσεις ανάλογες των (2.5.3) και (2.5.4) με $n = K_i$, $\lambda = \lambda_i$, $\mu = \mu_i$, και $m = m_i$.

4 ΓΕΝΙΚΟΤΕΡΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

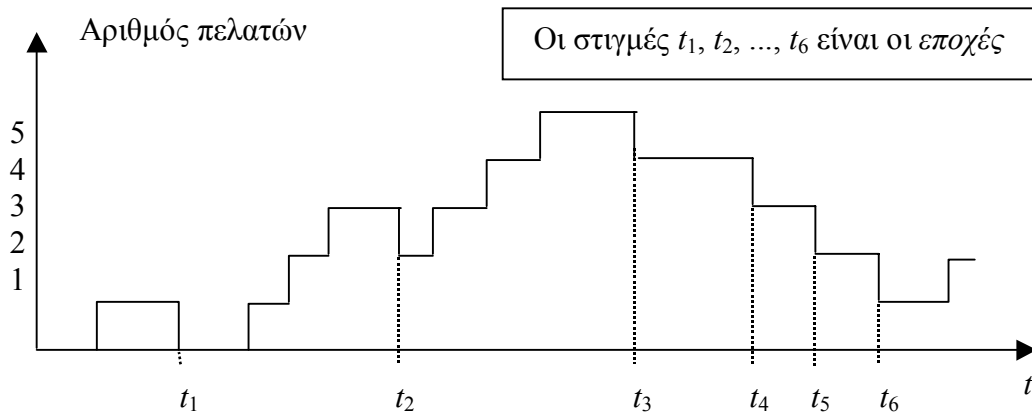
4.1 Το Σύστημα $M/G/1$

Παράδειγμα τέτοιου συστήματος είναι η ΕΛΠΑ που δέχεται τυχαίες κλήσεις για βοήθεια και έστω ότι οι κλήσεις είναι Poisson. Στη συνέχεια ο γερανός φεύγει, ταξιδεύει ένα χρόνο X_1 , προσφέρει τις υπηρεσίες για ένα χρόνο X_2 , και πηγαίνει το αυτοκίνητο με τη βλάβη σε συνεργείο σε χρόνο X_3 . Επιστρέφει στη βάση σε χρόνο X_4 .

Ο συνολικός χρόνος είναι $X = \sum_{i=1}^4 X_i$ που εν γένει δεν είναι εκθετικός. Άλλο παράδειγμα είναι ένα ασθενοφόρο κ.ο.κ.

Η ανάλυση ενός συστήματος $M/G/1$ θα γίνει με την εισαγωγή της έννοιας των εποχών (epochs) που είναι οι χρονικές στιγμές που ο εξυπηρετών τελειώσει μια εξυπηρέτηση.

Θεωρούμε το σχήμα:



Σχήμα 4.1. Πλήθος πελατών στο τέλος κάθε εξυπηρέτησης

Έστω

N : ο αριθμός πελατών (π.χ. τηλ. κλήσεων) στο σύστημα μετά το t_{K-1} , δηλαδή αφ' ότου η εξυπηρέτηση του πελάτη $K-1$ τελείωσε

R : ο αριθμός νέων πελατών που φθάνουν κατά τη διάρκεια της εξυπηρέτησης του επόμενου πελάτη K

N' : ο αριθμός πελατών στο σύστημα ακριβώς μετά τον t_K .

Παρατηρούμε ότι

αριθμός μετά $t_K =$

= αριθμός μετά t_{K-1} + αριθμός νέων πελατών – έναν πελάτη που εξυπηρετείται

$$N' = \begin{cases} N + R - 1 & \text{αν } N > 0 \\ R & \text{αν } N = 0 \end{cases} \quad (4.1.1)$$

Έστω $P_r = P[\text{ο αριθμός νέων αφίξεων κατά τη διάρκεια μιας εξυπηρέτησης} = r]$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\infty} P(\text{αριθμός } r, \text{ χρόνος εξυπηρέτησης} = x) dx \\ &= \int_0^{\infty} P(r|x) f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{(\lambda x)^r}{r!} e^{-\lambda x} f(x) dx \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

επειδή η είσοδος είναι Poisson με ρυθμό λ και η έξοδος είναι η γενική $f(x)$. Και για δεδομένο $f(x)$ μπορούμε να υπολογίσουμε τα $P_r, r = 0, 1, 2, \dots$

Ορίζουμε τον **ενδεικτικό τελεστή**

$$I_N = \begin{cases} 0 & \text{αν } N > 0 \\ 1 & \text{αν } N = 0 \end{cases}$$

οπότε η (4.1.1) γράφεται

$$N' = N + R - 1 + I_N, \quad \forall N \geq 0.$$

Οι αφίξεις R πελατών σε διάστημα x ακολουθούν την κατανομή Poisson. Άρα

$$E(R|x) = \lambda x$$

$$E(R^2|x) = \lambda^2 x^2 + \lambda x$$

και

$$E(R) = \int_0^{\infty} E(R|x) f(x) dx = \int_0^{\infty} \lambda x f(x) dx = \frac{\lambda}{\mu}, \quad (4.1.3)$$

όπου λάβαμε υπ' όψιν το ότι η μέση τιμή εξυπηρέτησης είναι $1/\mu$ αν και δεν είναι εκθετική.

Ομοίως

$$\begin{aligned} E(R^2) &= \int_0^{\infty} E(R^2|x)f(x)dx = \int_0^{\infty} (\lambda^2 x^2 + \lambda x)f(x)dx \\ &= \lambda^2 E(X^2) + \lambda E(X) = \lambda^2 \left(\sigma_X^2 + \frac{1}{\mu^2} \right) + \frac{\lambda}{\mu}. \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Αν υπάρχει μόνιμη κατάσταση θα πρέπει $E(N) = E(N')$ δηλαδή οι εξυπηρετήσεις είναι τέτοιες ώστε να μην υπάρχει συσσώρευση στο σύστημα. Άρα

$$E(N') = E(N) + E(R) - 1 + E(I_N) \Rightarrow$$

$$E(I_N) = 1 - E(R) = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \rho. \quad (4.1.5)$$

Η (4.1.5) είναι η πιθανότητα $P(N=0)$ ώστε το σύστημα να είναι άδειο μετά από μια αναχώρηση. Μπορεί ν' αποδειχθεί ότι όπως και στο σύστημα $M/M/1$ έτσι κι εδώ η συνθήκη ευστάθειας είναι $\rho < 1$ ή $\lambda < \mu$.

Υπολογίζουμε τώρα τη δεύτερη ροπή του N' .

$$E(N'^2) = E[N^2 + (R-1)^2 + I_N^2 + 2N(R-1) + 2NI_N + 2I_N(R-1)].$$

Εξ ορισμού $I_N^2 = I_N$, $2NI_N = 0$ και στη μόνιμη κατάσταση πρέπει $E(N'^2) = E(N^2)$, επομένως η παραπάνω σχέση γίνεται

$$E(R-1)^2 + E(I_N) + 2E(N)E(R-1) + 2E(I_N)E(R-1) = 0.$$

Χρησιμοποιώντας τις (4.1.3)-(4.1.5)

$$E(N) = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \sigma_X^2}{2(1-\rho)}. \quad (4.1.6)$$

Τώρα $E(N)$ είναι ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα αμέσως μετά από κάθε εξυπηρέτηση. Αυτός ο αριθμός, μπορεί ν' αποδειχθεί, ισούται με το μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα στη μόνιμη κατάσταση για κάποιον παρατηρητή που βλέπει το σύστημα σε τυχαίες στιγμές. Για να συμβαίνει αυτό πρέπει η κατανομή στη μόνιμη κατάσταση των πελατών μετά τις στιγμές συμπλήρωσης εξυπηρέτησης να είναι ίδια μ' αυτήν σε τυχαίες στιγμές. Ακολουθεί μια σκιαγράφηση απόδειξης. Ορίζουμε:

π_n : πιθανότητα μόνιμης κατάστασης για να υπάρχουν στο σύστημα n πελάτες μετά τη συμπλήρωση μιας εξυπηρέτησης

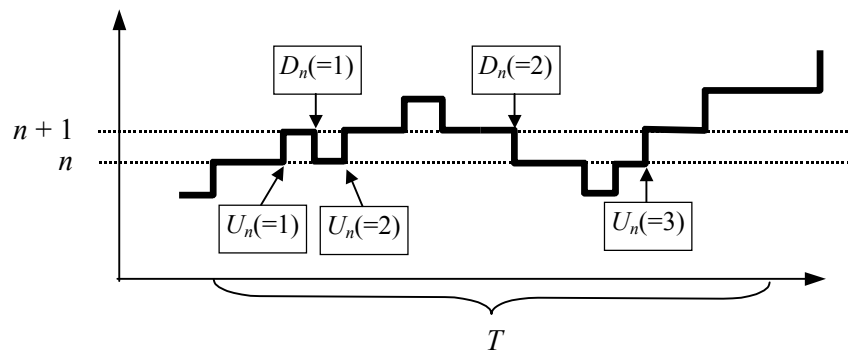
a_n : πιθανότητα μόνιμης κατάστασης ώστε ένας αφικνούμενος πελάτης να εύρει n πελάτες στο σύστημα

D_n : αριθμός μεταβάσεων προς τα κάτω από τον $n+1$ στον n πελάτη σε κάποιο διάστημα T

$D = \sum_{n=0}^{\infty} D_n$: συνολικός αριθμός βημάτων προς τα κάτω στο διάστημα T

U_n : μεταβάσεις προς τα πάνω από n στο $n+1$

$U = \sum_{n=0}^{\infty} U_n$: συνολικός αριθμός μεταβάσεων



Παρατηρούμε ότι σ' ένα διάστημα T οι ποσότητες D_n και U_n διαφέρουν το πολύ κατά 1. Στη μόνιμη κατάσταση

$$\pi_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{D_n}{D}$$

Επίσης στη μόνιμη κατάσταση και καθώς $T \rightarrow \infty$, $D \rightarrow U$ δηλαδή έχουμε τόσες ανόδους όσες καθόδους. Ξέρουμε ότι $D_n \approx U_n$, άρα

$$\pi_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{D_n}{D} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{U_n}{U}$$

Αλλά $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{U_n}{U}$ είναι η πιθανότητα ότι το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση n μετά από μια άφιξη. Οι αφίξεις επί πλέον γίνονται κατά Poisson και άρα είναι τυχαίες, δηλαδή

$$a_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{U_n}{U} \quad \text{ή} \quad \pi_n = a_n$$

στη μόνιμη κατάσταση, έτσι οι κατανομές είναι ίδιες.

Τώρα εξ ορισμού

$$E(I_N) = 1 \quad P_{N=0} = P_0 = 1 - \rho. \quad (4.1.7)$$

Επίσης $E(N)$ είναι ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα όπως ήδη δείξαμε ή

$$\bar{N} = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \sigma_X^2}{2(1 - \rho)}, \quad (4.1.8)$$

ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα

$$T = \frac{N}{\lambda} = \frac{1}{\mu} + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \sigma_X^2}{2\lambda(1 - \rho)}, \quad (4.1.9)$$

στην ουρά ο μέσος χρόνος αναμονής είναι

$$W = T - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda[(1/\mu^2) + \sigma_X^2]}{2(1 - \rho)} \quad (4.1.10)$$

και ο μέσος αριθμός πελατών

$$\bar{N}_q = \lambda W = \frac{\rho^2 + \lambda^2 \sigma_X^2}{2(1 - \rho)}. \quad (4.1.11)$$

Οι τύποι (4.1.7)-(4.1.11) λέγονται εξισώσεις των **Pollaczek-Khintchine (P-K)** και βλέπουμε ότι είναι πολύ απλές και δεν χρειάζονται αναλυτική έκφραση της $f(x)$. Η μόνη συνθήκη είναι $\rho < 1$.

4.2 Γενικότερα Μοντέλα

Τώρα θα εξετάσουμε μερικά πιο δύσκολα μοντέλα όπως το $M|G|m|m$ όπου η μέθοδος των εποχών δεν μπορεί να εφαρμοσθεί με άνεση. Θα χρησιμοποιήσουμε μερικά αποτελέσματα χωρίς απόδειξη.

Οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης για το $M|G|m|m$ δίνονται από

$$P_n = \frac{(\lambda / \mu)^n}{\sum_{k=0}^m \frac{(\lambda / \mu)^k}{k!}} \quad \text{για } 0 \leq n \leq m. \quad (4.2.1)$$

Το εκπληκτικό αυτού του τύπου είναι ότι είναι ακριβώς ίδιος μ' εκείνον του συστήματος $M/M/m/m$. Εδώ επομένως ισχύει ο τύπος του Erlang, δηλαδή η πιθανότητα μια κλήση να βρει το σύστημα κατειλημμένο και να χαθεί (δεν υπάρχει φερ' ειπείν διαθέσιμο νοσοκομειακό και βρίσκουμε άλλο μέσο μεταφοράς) είναι:

$$P_m = \frac{(\lambda / \mu)^m}{\sum_{k=0}^m \frac{(\lambda / \mu)^k}{k!}}. \quad (4.2.2)$$

Έστω ότι σ' ένα νοσοκομείο θέλουμε η πιθανότητα να μην έχουμε διαθέσιμο νοσοκομειακό να είναι $\leq l$ τότε υπολογίζουμε το m από την (4.2.2) λύνοντας την $P_m \leq l$.

4.2.1 Το μοντέλο $M/G/\infty$

Αν θέσουμε τώρα στην (4.2.1) $m \rightarrow \infty$, τότε έχουμε τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης για το $M/G/\infty$:

$$P_n = \frac{(\lambda / \mu)^n}{e^{\lambda / \mu}} = \frac{(\lambda / \mu)^n e^{-\lambda / \mu}}{n!}, \quad n \geq 0 \quad (4.2.3)$$

που είναι ακριβώς ο τύπος του $M/M/\infty$. Εδώ βέβαια, όπως και στο $M/M/\infty$

$$\bar{N} = \frac{\lambda}{\mu}, \quad T = \frac{1}{\mu}, \quad \bar{N}_q = W = 0.$$

Ο τύπος (4.2.3) μπορεί ν' αποδειχθεί κατ' ευθείαν ως εξής: Για τυχούσα μη αρνητική τυχαία μεταβλητή X ισχύει

$$E(X) = \int_0^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} xF'(x)dx = \lim_{a \rightarrow \infty} xF(x) \Big|_0^a - \int_0^{\infty} F(x)dx = \lim_{a \rightarrow \infty} aF(a) - \int_0^{\infty} F(x)dx$$

$$= \int_0^{\infty} dx - \int_0^{\infty} F dx = \int_0^{\infty} [1 - F(x)] dx. \quad (4.2.4)$$

Ορίζουμε

$$P_n(t|K) \triangleq P(n \text{ πελάτες εξυπηρετούνται} \mid \text{γίνονται } K \text{ αφίξεις στο } [0, t]).$$

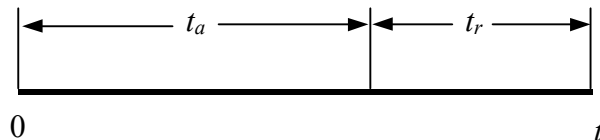
Παρατηρούμε ότι οι αφικνούμενοι πελάτες ή εξυπηρετούνται ή έχουν αναχωρήσει ουρά δεν υπάρχει. Τώρα

$$P_n(t) = P(n \text{ πελάτες εξυπηρετούνται στον } t) = \sum_{K=0}^{\infty} P_n(t|K)P(K)$$

αλλά $P(K) = \frac{(\lambda t)^K}{K!} e^{-\lambda t}$ λόγω του ότι είναι Poisson. Η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$P_n(t) = \sum_{K=0}^{\infty} P_n(t|K) \frac{(\lambda t)^K e^{-\lambda t}}{K!}. \quad (4.2.5)$$

Μπορεί ν' αποδειχθεί ότι αν οι αφίξεις είναι Poisson, τότε οι χρόνοι αφίξεως (όχι οι χρόνοι ανάμεσα στις αφίξεις) είναι ομοιόμορφα κατανεμημένοι στο $[0, t]$. Κάποιος πελάτης φθάνει τη στιγμή t_a και έχει υπολειπόμενο χρόνο στο $[0, t]$ $t_r = t - t_a$.



Έστω ότι η κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης είναι $F(x)$. Τότε η πιθανότητα να ευρίσκεται ακόμη υπό εξυπηρέτηση στο χρόνο t είναι

$$P(t - t_a < X \mid t_a) = P(t_r < X) = 1 - P(X \leq t_r) = 1 - F(t_r)$$

ενώ η πιθανότητα άφιξης μέσα στο χρόνο $[t - t_r, t - t_r + \Delta t]$ λόγω ομοιομορφίας είναι

$\bar{P} = \frac{\Delta t_r}{t}$ και η πιθανότητα ένας τυχαία αφικνούμενος πελάτης στο $[0, t]$ να

εξυπηρετείται ακόμη στον t είναι

$$P \triangleq P_t(\text{εξυπηρετείται})$$

$$\begin{aligned}
&= P(T_r < X) = \int_0^t P(T_r < X, T_r = t_r) dt_r \\
&= \int_0^t P(T_r < X | t_r) P(t_r) dt_r = \int_0^t P(t_r < X) P(t_r) dt_r \\
&= \int_0^t [1 - F(t_r)] \frac{1}{t} dt,
\end{aligned}$$

όπου

X : χρόνος εξυπηρέτησης (τυχαία μεταβλητή)

T_r : εναπομένων χρόνος (τυχαία μεταβλητή).

Τώρα λόγω του ότι οι αφίξεις γίνονται ανεξάρτητα, δοθεισών K αφίξεων στο $[0, t]$ η πιθανότητα οι n να εξυπηρετούνται είναι

$$P_n(t|K) = \binom{K}{n} P^n (1-P)^{K-n}, \quad (4.2.5\alpha)$$

όπου το P δίνεται από την προηγούμενη σχέση, και άρα

$$P_n(t|K) = \binom{K}{n} \left[\frac{1}{t} \int_0^t [1 - F(t_r)] dt_r \right]^n \left[1 - \frac{1}{t} \int_0^t [1 - F(t_r)] dt_r \right]^{K-n}$$

Αντικαθιστούμε αυτή την έκφραση στην (4.2.5)

$$\begin{aligned}
P_n(t) &= \sum_{K=0}^{\infty} \frac{K!}{n!(K-n)!} \left[\frac{1}{t} \int_0^t [1 - F(t_r)] dt_r \right]^n \left[1 - \frac{1}{t} \int_0^t [1 - F(t_r)] dt_r \right]^{K-n} \frac{(\lambda t)^K e^{-\lambda t}}{K!} \\
&= \frac{1}{n!} \left[\int_0^t [1 - F(t_r)] dt_r \right]^n \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{K-n} \lambda^n e^{-\lambda t}}{(K-n)!} \left[1 - \frac{1}{t} \int_0^t [1 - F(t_r)] dt_r \right]^{K-n}, \quad K \geq n.
\end{aligned}$$

Αλλά

$$e^{-\lambda t} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\left\{ \lambda t \left[1 - \frac{1}{t} \int_0^t [1 - F(t_r)] dt_r \right] \right\}^{K-n}}{(K-n)!} = e^{-\lambda t} e^{\lambda t \left[1 - \frac{1}{t} \int_0^t [1 - F(t_r)] dt_r \right]} = e^{-\lambda \int_0^t [1 - F(t_r)] dt_r}$$

και άρα

$$P_n(t) = \frac{1}{n!} \left[\lambda \int_0^t [1 - F(t_r)] dt_r \right]^n e^{-\lambda \int_0^t [1 - F(t_r)] dt_r}. \quad (4.2.5\beta)$$

Η (4.2.5) δίνει τις πιθανότητες P_n , σαν συνάρτηση του t . Για $t \rightarrow \infty$ ευρίσκομε λόγω της (4.2.4)

$$\int_0^{\infty} [1 - F(t_r)] dt_r = \frac{1}{\mu}$$

και η (4.2.5) γίνεται η (4.2.3).

4.2.2 Το μοντέλο G/G/1

Ερχόμαστε στη συνέχεια στο πιο προχωρημένο και δύσκολο σύστημα G/G/1. Εδώ υποθέτουμε ότι οι χρόνοι ανάμεσα στις αφίξεις είναι ανεξάρτητοι και έχουν κάποια γενική κατανομή. Το ίδιο ισχύει για τις εξυπηρετήσεις. Έστω ότι για τους χρόνους ανάμεσα στις αφίξεις έχουμε:

$$\text{πυκνότητα } f_a(t), \quad E(t) = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{Var}(t) = \sigma_t^2$$

ενώ για την εξυπηρέτηση τα αντίστοιχα μεγέθη είναι:

$$f_s(x), \quad E(X) = \frac{1}{\mu}, \quad \text{Var}(X) = \sigma_x^2.$$

Τότε, έχει αποδειχθεί, ο μέσος χρόνος παραμονής στην ουρά είναι φραγμένος ως εξής:

$$\frac{\rho^2(1 + \sigma_x^2 \mu^2) - 2\rho}{2\lambda(1 - \rho)} \leq W \leq \frac{\lambda(\sigma_t^2 + \sigma_x^2)}{2(1 - \rho)} \quad (4.2.6)$$

όπου $\rho = \lambda/\mu < 1$. Το άνω φράγμα είναι κοντά, όμως το κάτω είναι μακριά και η χρησιμότητά του αμφίβολη. Πολλά μεγέθη μπορούν να φραγούν από την (4.2.6) επειδή

$$T = W + \frac{1}{\mu}, \quad \bar{N} = \lambda T, \quad \bar{N}_q = \lambda W.$$

Ένα καλύτερο κάτω φράγμα μπορεί να βρεθεί αν ισχύει το εξής:

Έστω $f_a(t)$ η πυκνότητα για τους χρόνους ανάμεσα στις αφίξεις η οποία έχει την ιδιότητα για κάθε $t_0 > 0$

$$E(t - t_0 | t > t_0) \leq \frac{1}{\lambda}. \quad (4.2.7)$$

Η (4.2.7) μας λέει ότι αν περάσει κάποιος χρόνος t_0 , τότε η μέση τιμή του υπόλοιπου χρόνου είναι $\leq 1/\lambda$. Ξέρουμε ότι για την εκθετική κατανομή η (4.2.7) ισχύει σαν ισότητα. Οι περισσότερες κατανομές (όπως βήτα, ομοιόμορφη, κ.λπ.) ικανοποιούν την (4.2.7). Εντούτοις υπάρχουν κάποιες που δεν την ικανοποιούν.

Τώρα αν η (4.2.7) ισχύει, τότε

$$\frac{\lambda(\sigma_i^2 + \sigma_x^2)}{2(1-\rho)} - \frac{1+\rho}{2\lambda} \leq W \leq \frac{\lambda(\sigma_i^2 + \sigma_x^2)}{2(1-\rho)} \quad (4.2.8)$$

που είναι παρά πολύ καλό φράγμα. Πράγματι για το \bar{N}_q έχουμε

$$\frac{\lambda^2(\sigma_i^2 + \sigma_x^2)}{2(1-\rho)} - \frac{1+\rho}{2} \leq \bar{N}_q \leq \frac{\lambda^2(\sigma_i^2 + \sigma_x^2)}{2(1-\rho)} \quad (4.2.9)$$

και επειδή $\rho \in (0, 1)$ τότε τα δύο φράγματα απέχουν από 1 έως 0.5. Για $\rho \rightarrow 1$ τότε $\bar{N}_q \gg$ και η απόσταση των δύο φραγμάτων είναι εκπληκτικά ακριβής.

Για την περίπτωση $\rho = 1$ έχουμε και την προσέγγιση μεγάλης κυκλοφορίας (heavy traffic approximation) η οποία μας λέει ότι στο σύστημα $G/G/1$ ο χρόνος αναμονής στην ουρά στη μόνιμη κατάσταση είναι προσεγγιστικά εκθετικός με μέση τιμή

$$W = \frac{\lambda(\sigma_i^2 + \sigma_x^2)}{2(1-\rho)}. \quad (4.2.10)$$

Το εκπληκτικό αυτού του αποτελέσματος είναι ότι το πάνω όριο της (4.2.8) γίνεται ακριβές καθώς $\rho \rightarrow 1$, ενώ τώρα ξέρουμε και την κατανομή που είναι εκθετική. Επίσης για $\rho \rightarrow 1$ η (4.2.10) εκρήγνυται όπως και στο σύστημα $M/M/1$. Το σύστημα $M/M/1$ θα μας καταδιώκει για πολύ!

4.2.3 Το σύστημα $G/G/m$

Υπάρχουν κι εδώ μερικά άνω και κάτω φράγματα που συχνά έχουν ευρεθεί από

το μοντέλο $G/G/1$ με έναν εξυπηρετούντα m φορές ταχύτερο. Αποδεικνύεται ότι

$$W_1 - \frac{(m-1)\mu E(X^2)}{2m} \leq W \leq \frac{(\sigma_t^2 + (1/m)\sigma_x^2 + [(m-1)/m^2]1/\mu^2)\lambda}{2(1-\lambda/m\mu)}, \quad (4.2.11)$$

όπου W_1 είναι ο μέσος χρόνος αναμονής ουράς για το $G/G/1$ και με χρόνο εξυπηρέτησης τον X/m , δηλαδή το σύστημα είναι ταχύτερο κατά m φορές από τον κάθε ένα από τους m εξυπηρετούντες, ενώ οι αφίξεις είναι ίδιες μ' αυτές του $G/G/m$.

Επομένως το W_1 ή θα υπολογισθεί ακριβώς αν η κατανομή είναι γνωστή ή από το κάτω φράγμα της (4.2.6) ή (4.2.8) αν ικανοποιούνται οι συνθήκες της.

Τέλος αν έχουμε μεγάλη κυκλοφορία ισχύει το εξής:

Αν $\frac{\lambda}{m\mu} \rightarrow 1$ για το σύστημα $G/G/m$, τότε ο χρόνος αναμονής στην ουρά στη μόνιμη

κατάσταση έχει κατανομή περίπου εκθετική με μέση τιμή

$$W \approx \frac{(\sigma_t^2 + \frac{\sigma_x^2}{m})\lambda}{2(1 - \frac{\lambda}{m\mu})}$$

και για τιμές $\rho = \frac{\lambda}{m\mu} \approx 1$ έχουμε έκρηξη της ουράς όπως στο $M/M/m$.

5 ΕΝΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΓΡΑΜΜΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

Είδαμε ήδη ότι τα αναλυτικά μοντέλα Markov έχουν μεγάλες αδυναμίες όταν πρόκειται να περιγράψουμε γραμμές παραγωγής με αρκετές μηχανές και χώρους εναποθήκευσης. Εδώ θα ιδούμε ένα μοντέλο που κάνει χρήση προσομοίωσης και στοιχειώδους ανάλυσης ταυτόχρονα. Αυτό το μοντέλο είναι ακριβές και οι χρόνοι CPU που απαιτεί είναι της τάξης λίγων δευτερολέπτων για μεγάλους υπολογιστές όπως ο IBM-3090.

Υποθέσεις:

1. Κάθε μηχανή είναι **λειτουργική (1) ή υπό επισκευή (0)**.
2. Υπάρχει μια **άπειρη πηγή στην αρχή** και μια **άπειρη καταβόθρα στο τέλος της γραμμής**. Έτσι η πρώτη μηχανή ποτέ δεν «πεινάει» και η τελευταία ποτέ δεν αποκλείεται.
3. Οι **ρυθμοί όλων των μηχανών είναι αιτιοκρατικοί και γνωστοί**.
4. Οι μηχανές χαλούν μόνο μετά την παραγωγή ενός κομματιού.
5. Μια **πεινασμένη ή αποκλεισμένη μηχανή δεν χαλάει**.
6. Ο **χρόνος μεταφοράς** ενός κομματιού από τη μια μηχανή στην άλλη είναι **αμελητέος** ή περιλαμβάνεται στο χρόνο επεξεργασίας.
7. Ο χρόνος που μια μηχανή χαλάει είναι τυχαία μεταβλητή με γνωστή κατανομή. Η κατανομή θεωρείται ίδια για όλες τις μηχανές.
8. Ο χρόνος επισκευής για κάθε μηχανή είναι τυχαία μεταβλητή με γνωστή κατανομή που είναι ίδια για όλες τις μηχανές.

Οι κατανομές στα (7) και (8) θα ληφθούν εκθετικές. Εντούτοις, οποιαδήποτε άλλη κατανομή μπορεί να χρησιμοποιηθεί.

Για να αποφευχθεί ο υπερβολικός χρόνος υπολογιστή όταν προωθούμε τα κομμάτια ένα-ένα κάνουμε χρήση 5 βασικών γεγονότων:

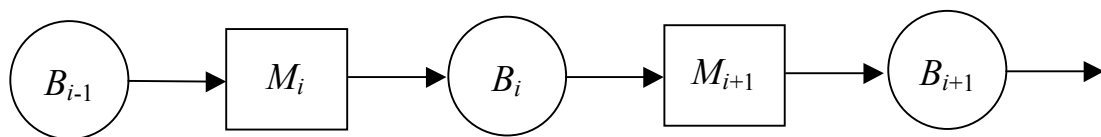
1. χώροι εναποθήκευσης πλήρεις
2. χώροι εναποθήκευσης άδειοι
3. χώροι εναποθήκευσης ούτε άδειοι ούτε γεμάτοι
4. μηχανή στην κατάσταση 1
5. μηχανή στην κατάσταση 0

Το μοντέλο θα μπορούσε να μετατραπεί σ' έναν αργό προσομοιωτή στις εξής περιπτώσεις:

- α. Ο χώρος εναποθήκευσης είναι άδειος, η επόμενη μηχανή είναι ταχύτερη από την προηγούμενη και έχουμε έτσι μια συνεχή ταλάντωση από το γεγονός 2 στο 3 κ.ο.κ.
- β. Ο χώρος εναποθήκευσης είναι πλήρης, η επόμενη μηχανή είναι αργότερη από την προηγούμενη και έχουμε ταλάντωση από το γεγονός 1 στο 3 κ.ο.κ.

Το μοντέλο αποφεύγει και τις δύο περιπτώσεις θεωρώντας στην (α) περίπτωση ότι ο χώρος είναι άδειος ή στην (β) γεμάτος και συμπτύσσοντας τη γραμμή όπως θα ιδούμε στη συνέχεια.

Έστω λοιπόν το σύστημα (Σχ. 5.1)



Σχήμα 5.1. Τμήμα γραμμής παραγωγής

Ορίζουμε

C_i : η χωρητικότητα του B_i

N_i : αριθμός κομματιών στον B_i

R_i : ρυθμός παραγωγής της M_i

Αλλαγές κατάστασης χώρων εναποθήκευσης

1. Αν η μηχανή i παράγει με ρυθμό μεγαλύτερο της μηχανής $i+1$, τότε ο B_i γεμίζει σε χρόνο

$$T_{C_i} = \frac{C_i - N_i}{R_i - R_{i+1}}, \quad \text{όταν } R_i - R_{i+1} > 0.$$

2. Το δυαδικό φαινόμενο του (1) δίνει το χρόνο που ο χώρος αδειάζει

$$T_{E_i} = \frac{N_i}{R_{i+1} - R_i}, \quad \text{όταν } R_{i+1} - R_i > 0.$$

3. Αν οι μηχανές i και $i+1$ παράγουν στον ίδιο ρυθμό, τότε ο χώρος παραμένει στο ίδιο σημείο

$$T_{B_i} = \infty, \quad \text{όταν } R_i - R_{i+1} = 0.$$

Στην περίπτωση αυτή ο χρόνος επόμενου γεγονότος του B_i είναι ίσος με το μεγαλύτερο πραγματικό αριθμό.

Αλλαγές κατάστασης των μηχανών

Ο χρόνος που η μηχανή M_i χαλάει ισούται με

$$T_{F_i} = \frac{N_{F_i}}{R_i}$$

όπου N_{F_i} είναι ο αριθμός κομματιών που η μηχανή παράγει μέχρι να χαλάσει. **Ο αριθμός N_{F_i} ευρίσκεται με τη βοήθεια της γεννήτριας τυχαίων αριθμών.**

Αν παρέλθει χρόνος T_E , ο αριθμός κομματιών μέχρι να χαλάσει η μηχανή είναι

$$N'_{F_i} = N_{F_i} - R_i T_E$$

$$\text{και } T'_{F_i} = \frac{N'_{F_i}}{R_i}.$$

Ο χρόνος επισκευής μιας μηχανής T_{R_i} ευρίσκεται πάλι από τη γεννήτρια τυχαίων αριθμών. Αν περάσει χρόνος T_E , τότε ο εναπομένων χρόνος επισκευής είναι

$$T'_{R_i} = T_{R_i} - T_E.$$

Έχοντας καθορίσει τις αλλαγές κατάστασης των μηχανών προχωρούμε τους αλγόριθμους.

1. Ο αλγόριθμος γεμάτου χώρου εναποθήκευσης

Όταν γεμίσει ο B_i , όλα τα είδη (μηχανές και χώροι) προς την έξοδο δεν επηρεάζονται. Προς την είσοδο όμως έχουμε αποκλεισμό της μηχανής M_i . Αν η M_i λειτουργεί γρηγορότερα από τη M_{i+1} , τότε η M_i υποχρεώνεται να λειτουργήσει στο ρυθμό

$$R'_i = \min(R_{i+1}, R_i).$$

Ο αλγόριθμος επαναλαμβάνεται προς την είσοδο ως εξής: Αν ο B_{i-1} δεν είναι πλήρης, τότε μπορεί να δεχθεί κομμάτια από τη M_{i-1} και δεν υπάρχει μετάδοση του φαινομένου προς την είσοδο. Αν ο B_{i-1} είναι πλήρης, τότε γίνεται νέα προσαρμογή ρυθμών

$$R'_{i-1} = \min(R'_i, R_{i-1}) \quad \text{κ.ο.κ.}$$

2. Ο αλγόριθμος άδειου χώρου

Όταν ο B_i αδειάζει δεν υπάρχει αποτέλεσμα προς την είσοδο αφού ο χώρος μπορεί να δεχθεί κομμάτια. Προς την έξοδο όμως η μηχανή M_{i+1} υποχρεώνεται σε μικρότερο ρυθμό

$$R'_{i+1} = \min(R_i, R_{i+1}).$$

Ο αλγόριθμος επαναλαμβάνεται προς την έξοδο: Αν ο B_{i+1} δεν είναι άδειος ή γεμάτος μπορεί να δώσει κομμάτια στη M_{i+2} και δεν υπάρχει μετάδοση του φαινομένου. Αν ο B_{i+1} είναι άδειος, τότε ο ρυθμός της M_{i+2} γίνεται

$$R'_{i+2} = \min(R'_{i+1}, R_{i+2}) \quad \text{κ.ο.κ.}$$

3. Αλλαγές καταστάσεων των μηχανών

α. Όταν μια μηχανή M_i χαλάσει, τότε ο ρυθμός της γίνεται

$$R'_i = 0 .$$

Αν η μηχανή που προηγείται έχει πλήρη χώρο B_{i-1} , τότε αποκλείεται και

$$R'_{i-1} = 0 .$$

Ο νέος ρυθμός επομένως μεταδίδεται προς την είσοδο με τον αλγόριθμο πλήρους χώρου.

Αν η μηχανή που έπεται έχει άδειο χώρο, τότε πεινάει και

$$R'_{i+1} = 0 .$$

Ο νέος ρυθμός μεταδίδεται προς την έξοδο με τον αλγόριθμο άδειου χώρου.

β. Όταν η M_i επισκευασθεί, τότε

$$R'_i = R_{M_i}$$

όπου R_{M_i} είναι ο ονομαστικός ρυθμός παραγωγής της M_i .

Ο νέος ρυθμός μεταδίδεται προς την είσοδο ως εξής: Αν η M_{i-1} είναι στην κατάσταση 1 και ο χώρος $i-1$ είναι πλήρης, τότε ο ρυθμός της M_{i-1} γίνεται

$$R'_{i-1} = \min(R'_i, R_{M_{i-1}})$$

δηλαδή η M_{i-1} μπορεί να παράγει είτε στον ονομαστικό της ρυθμό ή στον R'_i . Αν η M_{i-1} είναι στην κατάσταση 0 δεν υπάρχει άλλη μετάδοση του φαινομένου. Αν ο B_{i-1} δεν είναι πλήρης, συνεχίζει να δέχεται κομμάτια και η μετάδοση του φαινομένου παύει, αλλιώς ο αλγόριθμος συνεχίζεται προς την είσοδο με τον B_{i-2} , κοκ .

Ο νέος ρυθμός μεταδίδεται προς την έξοδο ως εξής: Αν η μηχανή M_{i+1} είναι στην κατάσταση 1 και ο χώρος B_i άδειος, τότε ο ρυθμός της M_{i+1} γίνεται

$$R'_{i+1} = \min(R'_i, R_{M_{i+1}}) .$$

Αν η μηχανή M_{i+1} είναι στην κατάσταση 0, ο ρυθμός της παραμένει στο 0 και δεν υπάρχει μετάδοση του φαινομένου. Αν ο χώρος B_i δεν είναι πλήρης ή άδειος, τότε η μηχανή M_{i+1} συνεχίζει να δέχεται κομμάτια στον προηγούμενο ρυθμό και δεν υπάρχει μετάδοση. Ο αλγόριθμος συνεχίζεται προς την έξοδο.

Αρχικές συνθήκες του προγράμματος

1. Ορίζουμε τον ονομαστικό (μέγιστο) ρυθμό παραγωγής για όλες τις μηχανές και τον αρχικό αριθμό κομματιών σε κάθε χώρο.
2. Χρησιμοποιώντας τους ρυθμούς από το (1) προχωρούμε προς την έξοδο της γραμμής ορίζοντας τους νέους ρυθμούς με τον αλγόριθμο άδειων χώρων.
3. Προχωρούμε προς την είσοδο ορίζοντας νέους ρυθμούς με τον αλγόριθμο γεμάτων χώρων.
4. Υπολογίζουμε το χρόνο για το επόμενο γεγονός για κάθε χώρο και μηχανή βασιζόμενο στους τρέχοντες ρυθμούς και αριθμούς κομματιών.
5. Ευρίσκουμε το χώρο ή μηχανή με το μικρότερο χρόνο επόμενου γεγονότος.
6. Υπολογίζουμε τον αριθμό κομματιών που παρήχθησαν και τον αριθμό κομματιών στον κάθε χώρο στον ελάχιστο χρόνο επόμενου γεγονότος.
7. Ορίζουμε το επόμενο γεγονός (χώρος πλήρης ή μηχανή χαλασμένη κ.λπ.).
8. Υπολογίζουμε τις νέες στάθμες χώρων.
9. Υπολογίζουμε τους νέους ρυθμούς.
10. Υπολογίζουμε τον χρόνο επόμενου γεγονότος.
11. Υπολογίζουμε τον ελάχιστο χρόνο επόμενου γεγονότος.
12. Αν ο χρόνος που πέρασε είναι μικρότερος του συνολικού χρόνου προσομοίωσης πηγαίνουμε στο (6).
13. Αλλιώς stop.

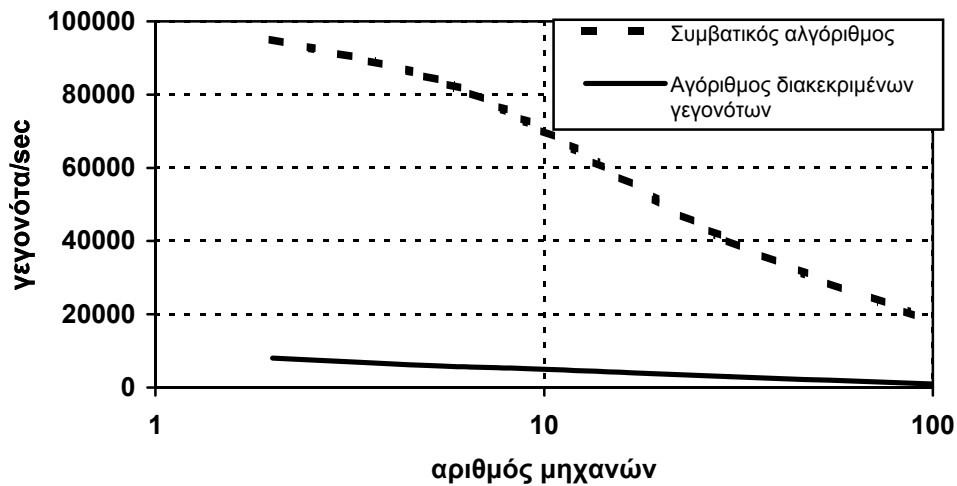
Ένα υπολογιστικό πείραμα

Ένα πρόγραμμα γράφτηκε σε γλώσσα Pascal και έτρεξε σε μηχανή IBM 3090. Ο αριθμός κομματιών μέχρι ένα σπάσιμο της μηχανής υπολογίστηκε από $N_{Fi} = -\lambda_i \ln(X)$ όπου λ_i είναι ο μέσος αριθμός που η μηχανή παράγει μέχρι να χαλάσει (MPTF mean number of parts-to-failure) και X είναι μια τυχαία μεταβλητή, ομοιόμορφα κατανομημένη στο $[0,1]$. Παρόμοια γεννήτρια δίνει το χρόνο επισκευής.

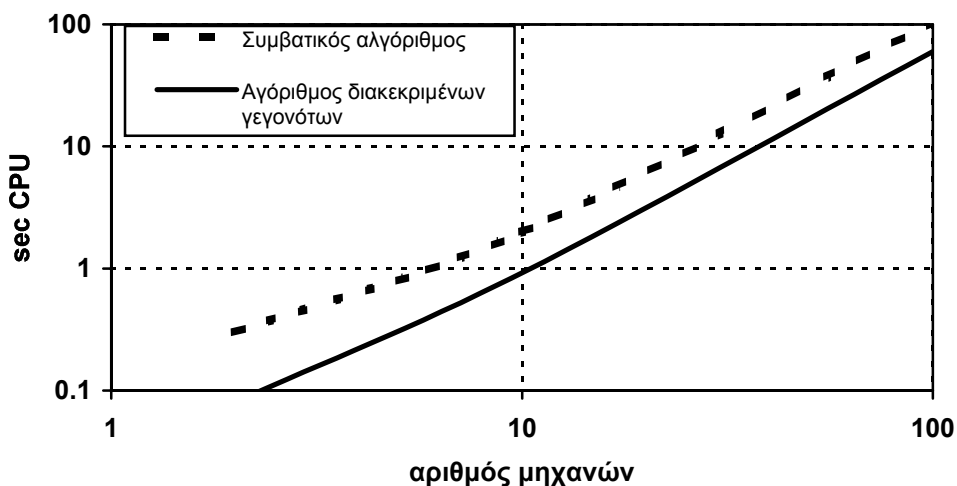
Μία γραμμή με 100 μηχανές και 99 χώρους εναποθήκευσης αναλύθηκε σε χρόνο

CPU της τάξης των 2 sec για παραγωγή 10.000 κομματιών. Παρατηρούμε ότι για ρυθμούς βλαβών μεγάλους το μοντέλο δεν είναι πολύ γρήγορο.

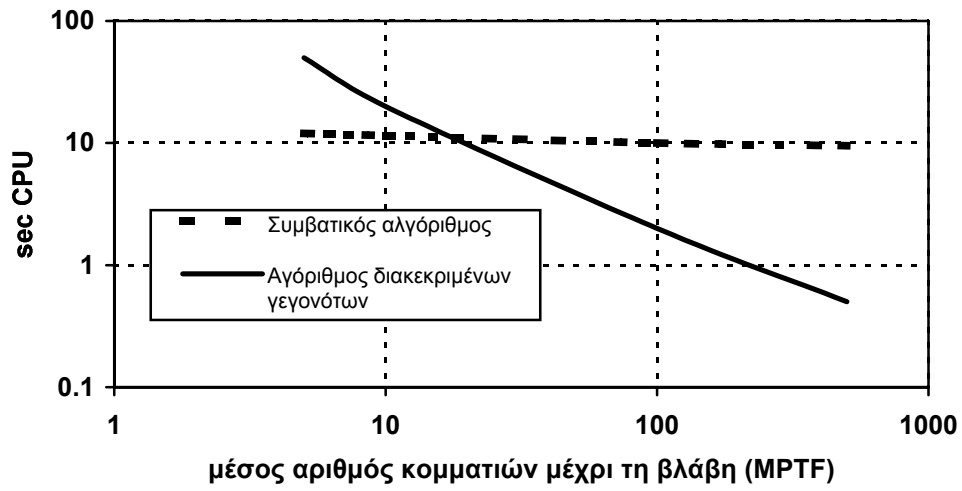
Το βασικό προσόν του μοντέλου είναι ότι είναι το μόνο αποτελεσματικό υπολογιστικά και ακριβές που έχει δημοσιευθεί ως τώρα. Πέρα απ' αυτό για σχετικά αξιόπιστες γραμμές και υψηλούς ρυθμούς παραγωγής η υπολογιστική του ταχύτητα είναι εκπληκτική.



Σχήμα 5.2. Συχνότητα γεγονότων (sec^{-1}) συναρτήσει του μήκους γραμμής



Σχήμα 5.3. Χρόνος CPU συναρτήσει του μήκους γραμμής



Σχήμα 5.4. Χρόνος CPU συναρτήσει του MPTF.

6 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΕΥΕΛΙΚΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ (FMS)

6.1 Εισαγωγή

Ένα **ευέλικτο σύστημα παραγωγής** (FMS: Flexible Manufacturing System) συνίσταται από μηχανές που εκτελούν κάποιον αριθμό εργασιών, ένα **σύστημα διαχείρισης υλικών** (MHS: Material Handling System), και μια υπολογιστική μονάδα για τον έλεγχο του συστήματος.

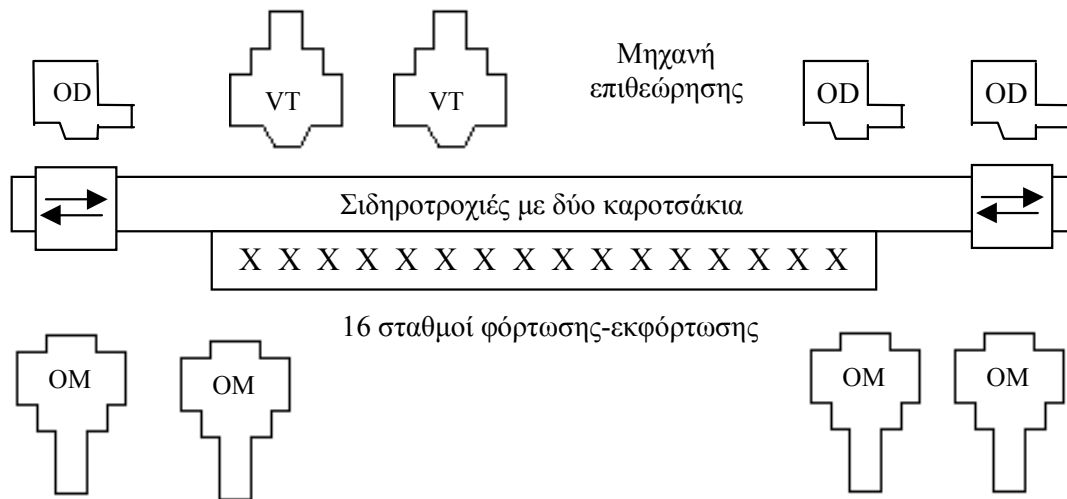
Το MHS μπορεί να είναι μια μεταφορική ταινία που μεταφέρει κομμάτια από σημείο σε σημείο ή ένα σύστημα με καροτσάκια σε σιδηροτροχιές ή μια αλυσίδα μεταφοράς πάντα κάτω από τον έλεγχο του υπολογιστή.

Η γραμμή παραγωγής είναι σχεδιασμένη να παράγει μεγάλες ποσότητες μικρού αριθμού ειδών. Η γραμμή αλλάζει δύσκολα για να προσαρμοστεί σε νέα προϊόντα. Ένα κατάστημα εργασιών (job shop) αντίθετα (π.χ. μηχανουργείο) έχει τη δυνατότητα παραγωγής μεγάλης ποικιλίας προϊόντων σε μικρές όμως ποσότητες. Εκεί χρησιμοποιούν αριθμητικά ελεγχόμενες μηχανές (NC: Numerically Controlled) οι οποίες μπορούν να εκτελούν πολλές εργασίες αυτόματα κάτω από τον έλεγχο ενός μικροεπεξεργαστή και αλλάζουν εργαλεία επίσης αυτόματα.

Το FMS είναι ενδιάμεσο σύστημα που ενώ έχει αποτελεσματικότητα και όγκο παραγωγής μικρότερο της γραμμής παραγωγής είναι σαφώς ανώτερο του καταστήματος εργασιών ενώ συγχρόνως διατηρεί πολλά από τα χαρακτηριστικά της ευελιξίας του τελευταίου.

Το 75% της αξίας των μεταλλικών κομματιών που παράγονται στις ΗΠΑ παράγονται σε παρτίδες (batches) των 50 το πολύ κομματιών. Ένα FMS σε τέτοιου είδους μεγέθη παραγωγής θα ήταν ιδανικό.

Ήδη τέτοια συστήματα χρησιμοποιούνται ευρέως στις ΗΠΑ, την Ιαπωνία, τη Δυτική Ευρώπη και η χρήση τους σύντομα θα γενικευθεί.



- OD : δράπανα 4 τρυπανιών (omnidrills)
- OM : φρέζες (omnimills)
- VTL : τόννοι κατακόρυφης κεφαλής (vertical turret lathes)

Σχήμα 6.1. FMS της Caterpillar

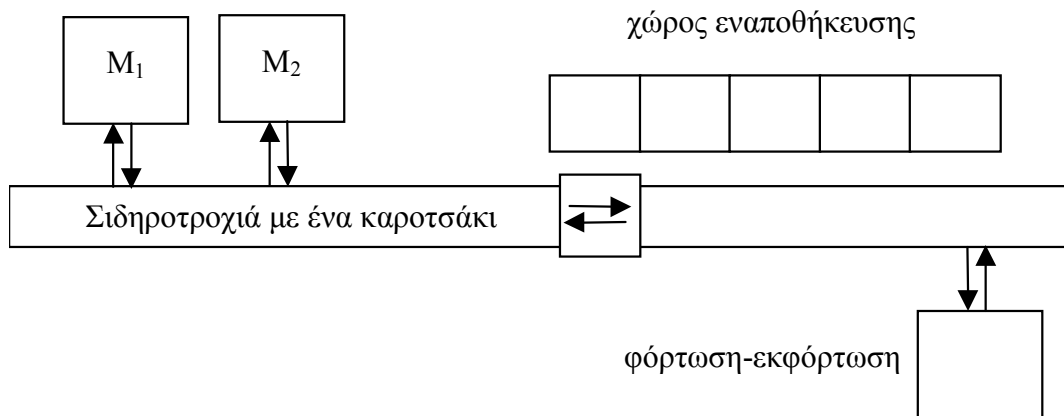
Στην εικόνα φαίνεται ένα FMS της Caterpillar. Το σύστημα αυτό παράγει εξωτερικά καλύμματα δύο μεγεθών αυτομάτων κιβωτίων ταχυτήτων. Για το κάθε κάλυμμα απαιτείται ένα κιβώτιο και το καπάκι. Τα κομμάτια φεύγουν από το σύστημα σαν συναρμολογημένα ζεύγη.

Παρατηρούμε την ύπαρξη πλεονασμού μηχανών για να υπάρχει ευελιξία.

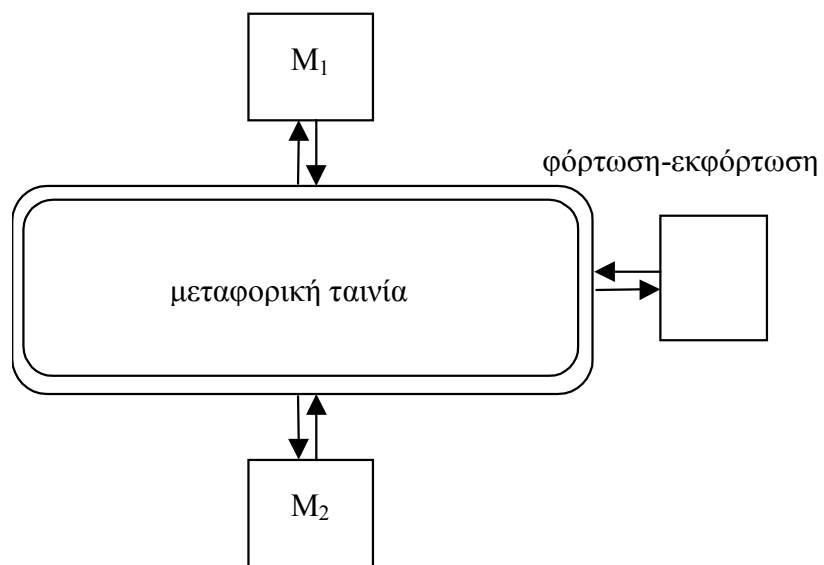
Στα FMS ο χώρος εναποθήκευσης κομματιών ή είναι ανύπαρκτος ανάμεσα στις μηχανές ή παίρνει ελάχιστα κομμάτια. Εντούτοις υπάρχει το MHS που ουσιαστικά είναι και κεντρικός χώρος εναποθήκευσης. Μπορούμε να έχουμε τα συστήματα των δύο εικόνων (Σχ. 6.2, 6.3).

Στο πρώτο υπάρχει ειδικός χώρος εναποθήκευσης, στο δεύτερο ο χώρος είναι η μεταφορική ταινία.

Για τη φόρτωση-εκφόρτωση, τις αλλαγές εργαλείων κ.λπ. υπάρχουν κατάλληλοι ψηφιακά ελεγχόμενοι ρομποτικοί μηχανισμοί.



Σχήμα 6.2. MHS με ένα καροτσάκι



Σχήμα 6.3. MHS με μεταφορική ταινία

6.2 Προβλήματα FMS

Όπως φαίνεται από την εισαγωγή σ' ένα FMS υπάρχει ευελιξία ως προς την ποσότητα και την πορεία κομματιών. Αυτή η ευελιξία εκφράζεται με τις τρεις βαθμίδες ελέγχου που μπορούμε να ασκήσουμε στο σύστημα και που ουσιαστικά είναι τα 3 μεγάλα προβλήματα των FMS.

1. **Έλεγχος ροής (flow control)**. Ο έλεγχος εδώ ρυθμίζει τους (μέσους) ρυθμούς παραγωγής κάθε εργασίας έτσι ώστε να ικανοποιηθούν οι απαιτήσεις της ζήτησης λαμβάνοντας υπ' όψιν τα στατιστικά χαρακτηριστικά αξιοπιστίας των μηχανών και τις στάθμες αποθέματος στους χώρους εναποθήκευσης.
2. **Έλεγχος δρομολόγησης (routing control)**. Έχοντας προσδιορίσει τους συνολικούς ρυθμούς παραγωγής από την ιεραρχία (1) προσδιορίζουμε τη βέλτιστη δρομολόγηση κομματιών στην κάθε μηχανή με σκοπό να έχουμε τους ζητούμενους ρυθμούς παραγωγής και την ελαχιστοποίηση των ουρών μπρος στις μηχανές.
3. **Έλεγχος ακολουθίας (sequence control)**. Αυτός ο έλεγχος καθορίζει τους χρόνους που κάθε εργασία φτάνει στο σύστημα, την ακολουθία τους, και την επόμενη κατεργασία μιας εργασίας μέσα στο σύστημα έτσι ώστε να πραγματοποιηθούν οι έλεγχοι (1) και (2).

Παραδείγματα ελέγχου δρομολόγησης είναι:

SPT : μικρότερος χρόνος επεξεργασίας (shortest processing time)

LPT : μεγαλύτερος χρόνος επεξεργασίας (longest processing time)

FOPR: λιγότερες απομένουσες επεξεργασίες για κάθε κομμάτι (fewest operations remaining)

MOPR: περισσότερες απομένουσες επεξεργασίες (most operations remaining)

SPT.TOT: μικρότερος χρόνος της συγκεκριμένης επεξεργασίας
πολλαπλασιασμένος επί το συνολικό χρόνο επεξεργασίας όλης της

εργασίας

SPT/TOT,

LPT.TOT,

LPT/TOT κ.λπ.

Τέτοιοι κανόνες είναι ευρετικοί και ελέγχονται με προσομοίωση σχετικά με κάποιο πρωτόκολλο λειτουργίας (φερ' ειπείν τα 3 δράπανα εργάζονται σαν ομάδα ή τα 2 δράπανα είναι ομάδα και το 1 συνδυάζεται με έναν VTL) και για κάποιο μέτρο απόδοσης (συνολική παραγωγή ή μέγεθος ουρών και αποθεμάτων).

Για το συγκεκριμένο σύστημα της Caterpillar έχει ευρεθεί ότι το SPT/TOT δίνει το μέγιστο ρυθμό συνολικής παραγωγής (throughput rate) και ο χρόνος προσομοίωσης σ' ένα mini computer ήταν της τάξης των 400 δευτερολέπτων.

6.3 Ένα μοντέλο FMS

Τώρα υποθέτουμε ότι έχουμε προσδιορίσει τους ελέγχους του συστήματος. Υποθέτουμε ότι:

1. Ο συνολικός αριθμός εργασιών στο σύστημα είναι N που μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι η χωρητικότητα των παλετών ή της μεταφορικής ταινίας. Το N είναι σταθερό που σημαίνει ότι μόλις μια εργασία συμπληρωθεί και φεύγει από το σύστημα, αμέσως μια νέα φθάνει απ' έξω στο σύστημα.
2. Το πρωτόκολλο μπρος από κάθε μηχανή είναι FCFS. Οι χρόνοι επεξεργασίας είναι εκθετικοί και όλες οι εργασίες έχουν την ίδια μέση τιμή, $1/\mu_i$, για τη μηχανή i .
3. Όλες οι μηχανές έχουν αρκετό χώρο εναποθήκευσης ώστε να χωρούν και οι N εργασίες.
4. Οι μηχανές είναι πάντα διαθέσιμες για επεξεργασία, έχουν δηλαδή αμελητέο χρόνο προετοιμασίας και δεν χαλούν ποτέ.

Θα χρησιμοποιήσουμε ένα κλειστό δίκτυο που είναι παρόμοιο δικτύου Jackson για να μοντελοποιήσουμε το FMS.

Στο κλειστό δίκτυο έχουμε M κόμβους: $1, 2, \dots, M$. Ο κόμβος i έχει m_i παράλληλους εξυπηρετούντες των οποίων ο καθένας έχει εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης με μέση τιμή $1/\mu_i$. Ένας πελάτης που εξυπηρετήθηκε στον κόμβο i προχωρεί στον κόμβο j με πιθανότητα P_{ij} . Στο πρόβλημα του FMS οι πιθανότητες P_{ij} είναι ουσιαστικά ο έλεγχος της 2ης βαθμίδας. Έστωσαν

N : συνολικός αριθμός πελατών στο σύστημα

n_i : αριθμός πελατών στον κόμβο $i =$ πελάτες στην εξυπηρέτηση + πελάτες στην ουρά του i .

Τότε

$$\sum_{i=1}^M n_i = N$$

Σαν κατάσταση στο σύστημα παίρνουμε το διάνυσμα

$$\mathbf{n} = [n_1 \ n_2 \ \dots \ n_M]^T.$$

Ορίζουμε την κοινή πιθανότητα $P(n_1, n_2, \dots, n_M)$. Ορίζουμε ακόμη τους ενδεικτικούς τελεστές

$$\delta(n_i) = \begin{cases} 0 & \text{αν } n_i = 0 \\ 1 & \text{αν } n_i \neq 0 \end{cases}$$

$$a_i(n_i) = \begin{cases} n_i & \text{αν } n_i \leq m_i \\ m_i & \text{αν } n_i \geq m_i. \end{cases}$$

Οι εξισώσεις ροής πιθανότητας γράφονται:

$$\left[\sum_{i=1}^M \delta(n_i) a_i(n_i) \mu_i \right] P(n_1 \ n_2 \ \dots, n_M) =$$

$$\sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^M \delta(n_i) a_k(n_k + 1) \mu_k P_{ki} P(n_1 \ n_2 \ \dots, n_i - 1, \dots, n_k + 1, \dots, n_M), \quad (6.3.1)$$

Ο τελεστής $\delta(n_i)$ μας λέει ότι είναι αδύνατο να φύγουμε από την κατάσταση n_i αν η κατάσταση αυτή είναι άδεια, ενώ ο τελεστής $a_i(n_i)$ μας δίνει το συνολικό αριθμό πελατών στην εξυπηρέτηση του κόμβου i .

Το αριστερό μέλος της (6.3.1) μας δίνει τη ροή πιθανότητας έξω από την κατάσταση (n_1, n_2, \dots, n_M) ενώ το δεξιό μέλος, τη ροή προς την κατάσταση αυτή.

Η λύση της (6.3.1) ευρίσκεται με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών. Μπορεί ν' αποδειχθεί ότι:

$$P(n_1, n_2, \dots, n_M) = G^{-1}(N) \prod_{i=1}^M \frac{x_i^{n_i}}{\beta_i(n_i)} \quad (6.3.2)$$

όπου η συνάρτηση $\beta_i(n)$ υπολογίζεται από τις επαναληπτικές σχέσεις:

$$\begin{aligned} \beta_i(0) &= 1 \\ \beta_i(n) &= a_i(n)\beta_i(n-1) \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

και τα x_i υπολογίζονται από τις

$$\sum_{i=0}^M P_{ik} \mu_i x_i = \mu_k x_k, \quad k=1, 2, \dots, M. \quad (6.3.4)$$

Ορίζουμε το διάνυσμα

$$\mathbf{U} = [\mu_1 x_1 \quad \mu_2 x_2 \quad \dots \quad \mu_M x_M]^T = [U_1 \quad U_2 \quad \dots \quad U_M]^T$$

και τον πίνακα $\mathbf{\Pi} = [P_{ik}]$. Τότε η (6.3.4) γράφεται $\sum_{i=1}^M P_{ik} U_i = U_k, k=1, \dots, M$ ή

$$\mathbf{\Pi} \mathbf{U} = \mathbf{U}$$

Ο πίνακας $\mathbf{\Pi}$ είναι στοχαστικός και έχει ένα ιδιοδιάνυσμα του οποίου όλα τα στοιχεία είναι θετικά και άρα υπάρχει λύση του συστήματος (6.3.4). Το σύστημα αυτό έχει άπειρες λύσεις. Μία από αυτές προκύπτει αν θεωρήσουμε το \mathbf{U} ως διάνυσμα πιθανοτήτων, ήτοι

$$U_1 + U_2 + \dots + U_M = 1.$$

Η συνάρτηση $G(N)$ της (6.3.2) είναι τέτοια ώστε η $P(n_1, n_2, \dots, n_M)$ να είναι συνάρτηση πιθανότητας, ήτοι

$$\sum_{\sum_{i=1}^M n_i = N} P(n_1, n_2, \dots, n_M) = 1 \Rightarrow G(N) = \sum_{\sum_{i=1}^M n_i = N} \prod_{i=1}^M \frac{x_i^{n_i}}{\beta_i(n_i)} \quad (6.3.5)$$

όπου η άθροιση είναι για όλα τα n_i έτσι ώστε $\sum_{i=1}^M n_i = N$.

Για το FMS που εξετάζουμε μπορεί ν' αποδειχθεί ότι ισχύουν τα εξής

$$m_i = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta_i(n_i) = 1$$

$$\text{και } x_i = \frac{U_i}{\mu_i}$$

όπου από την (6.3.4)

$$\sum_{i=1}^M P_{ik} U_i = U_k, \quad k = 1, \dots, M$$

και άρα

$$P(n_1, n_2, \dots, n_M) = G^{-1}(N) \prod_{i=1}^M \left(\frac{U_i}{\mu_i} \right)^{n_i}. \quad (6.3.6)$$

Τώρα η πιθανότητα n_i πελατών στον κόμβο i είναι

$$P_i(n_i) = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots \sum_{n_M} P(n_1, n_2, \dots, n_i, \dots, n_M)$$

όπου παραλείπεται το \sum_{n_i} . Από την (6.3.6)

$$P_i(n_i) = G^{-1}(N) G_i(N - n_i) \left(\frac{U_i}{\mu_i} \right)^{n_i} \quad (6.3.7)$$

όπου το $G_i(N - n_i)$ προκύπτει από την άθροιση όπως εκείνη της (6.3.5) παραλείποντας το i , και επειδή ο συνολικός πληθυσμός είναι N και n_i πελάτες ευρίσκονται στον κόμβο i έχουμε $G_i(N - n_i)$.

Ο συνολικός ρυθμός εξόδου (ρυθμός παραγωγής-throughput) της μηχανής i είναι

$$\begin{aligned} TH_i &= \sum_{n=1}^N \mu_i(n) P_i(n) \\ &= U_i G^{-1}(N) \sum_{n=1}^N G_i(N - n) \left(\frac{U_i}{\mu_i} \right)^{n-1} \\ &= U_i G^{-1}(N) \sum_{n=0}^N G_i(N - 1 - n) \left(\frac{U_i}{\mu_i} \right)^n \end{aligned}$$

ή

$$TH_i = U_i \frac{G(N-1)}{G(N)}. \quad (6.3.8)$$

Ο συνολικός ρυθμός εξόδου όλου του συστήματος ορίζεται ως το άθροισμα των

ρυθμών παραγωγής όλων των μηχανών του (σημ: δεν αντιστοιχεί στην έξοδο κομματιών από το σύστημα, αφού το σύστημα είναι κλειστό και δεν φεύγουν κομμάτια, αλλά στο σύνολο των αναχωρήσεων από τις μηχανές) και είναι

$$TH = \sum_{i=1}^M TH_i = \frac{G(N-1)}{G(N)} \quad (6.3.9)$$

επειδή $\sum_{i=1}^M U_i = 1$ αφού τα U_i προκύπτουν από την εξίσωση $\sum_{i=1}^M P_{ik} U_i = U_k$ και το U είναι διάνυσμα πιθανοτήτων.

Η φόρτιση της μηχανής i ορίζεται:

$$l_i = \frac{TH_i}{TH} = U_i. \quad (6.3.10)$$

Παράδειγμα

Ένα σύστημα FMS έχει δύο μηχανές (1 και 2) που κάνουν την ίδια κατεργασία και ένα MHS (0) μ' ένα καροτσάκι φόρτωσης-εκφόρτωσης κομματιών.

Κάθε κομμάτι που τελειώνει την κατεργασία αναμένει το καροτσάκι για να οδηγηθεί στο χώρο φόρτωσης-εκφόρτωσης. Όταν το κομμάτι φεύγει από το σύστημα ένα νέο ακατέργαστο κομμάτι φορτώνεται και οδηγείται σε μία μηχανή. Το MHS έχει ρυθμό εξυπηρέτησης $\mu_0 = 1$ (μηχανή→εκφόρτωση-φόρτωση→μηχανή), ενώ οι μηχανές $\mu_1 = 0.5, \mu_2 = 1$, και $N = 6$.

Τα ακατέργαστα κομμάτια δρομολογούνται μέσω του MHS προς τις μηχανές με πιθανότητες $P_{01} = P_{02} = 0.5$, άρα

$$U_0 = 0.5, U_1 = U_2 = 0.25.$$

Επειδή $m_i = 1$ προκύπτουν $\beta_i(n_i) = 1$. Από τη σχέση (6.3.5) υπολογίζουμε τα $G(5)$ και $G(6)$ και από την (6.3.8) βγαίνει αριθμητικά $TH_1 = TH_2 = 0.4174$.

7 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Θεωρήστε το μοντέλο γέννησης-θανάτου και έστω

$$\lambda_0 = \lambda, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = 0$$

$$\mu_1 = \mu, \quad \mu_2 = \mu_3 = \dots = 0.$$

Αυτό είναι το σύστημα $M/M/1$ χωρίς αναμονή για τους πελάτες. Τέτοιο σύστημα είναι η σειριακή σύνδεση μηχανών χωρίς εναποθήκευση. Εύρετε τις εξισώσεις που εκφράζουν τις $P_k(t)$ για $k = 0, 1$, και λύσετε τις εξισώσεις σαν συναρτήσεις των $P_0(0)$ και $P_1(0)$.

2. Έστω ένα αναμονητικό σύστημα γέννησης-θανάτου όπου ο ρυθμός γεννήσεων μειώνεται και εκείνος των θανάτων αυξάνεται καθώς το k αυξάνεται:

$$\lambda_k = (N-k)\lambda, \quad k < N \qquad \mu_k = k\mu, \quad k \leq N$$

$$\lambda_k = 0, \quad k \geq N \qquad \mu_k = 0, \quad k > N.$$

Γράψτε τις διαφορικές εξισώσεις για το $P_k(t)$.

3. Έστω μια μηχανή που αρχίζει λειτουργία στο χρόνο $t = 0$. Τα κομμάτια φθάνουν τυχαία κατά Poisson με ρυθμό λ . Κάθε επεξεργασία παίρνει x λεπτά που είναι τυχαία μεταβλητή. Εύρετε την πιθανότητα P το δεύτερο αφικνούμενο κομμάτι να μην περιμένει και υπολογίστε το μέσο χρόνο αναμονής W όταν $x =$ σταθερά και όταν το X είναι εκθετικό με πυκνότητα $f_0(x) = \mu e^{-\mu x}$.

4. Ένας πελάτης φθάνει σ' ένα σύστημα $M/M/m$ για εξυπηρέτηση και βρίσκει n πελάτες πριν απ' αυτόν και τους m εξυπηρετούντες κατειλημμένους. Εύρετε:

α. Το μέσο χρόνο αναμονής του πελάτη στην ουρά.

β. Το μέσο χρόνο από την άφιξη του πελάτη μέχρις ότου αδειάσει πλήρως το σύστημα υποθέτοντας ότι άλλες αφίξεις δεν γίνονται δεκτές μετά τον πελάτη.

γ. Την πιθανότητα ο πελάτης να εξυπηρετηθεί πριν από τον προηγούμενο πελάτη.

5. Έστω το σύστημα γέννησης-θανάτου

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & , 0 \leq n \leq K \\ 2\lambda & , K < n \end{cases}$$

$$\mu_n = \mu, \forall n > 0.$$

Εύρετε τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης P_n .

6. Έστω το σύστημα $M/M/2$ που ικανοποιεί $\lambda < 2\mu$. Εύρετε:

α. Τις διαφορικές εξισώσεις για τα $P_n(t)$.

β. Τη λύση μόνιμης κατάστασης.

7. Θεωρήστε το σύστημα γέννησης-θανάτου:

$$\lambda_n = (n+2)\lambda, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$\mu_n = n\mu, \quad n = 1, 2, \dots$$

Εύρετε την συνθήκη ώστε το σύστημα να είναι ευσταθές, τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης P_n και το μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα.

8. Θεωρήστε ένα σύστημα $M/M/1$ με αποθάρρυνση όπου ένας αφικνούμενος πελάτης μπαίνει στην ουρά με πιθανότητα e^{-aW} , όπου $a \geq 0$ και W είναι μια εκτίμηση του χρόνου παραμονής στην ουρά που εκτιμάται από τον τύπο $W = n/\mu$ όταν ο πελάτης βρίσκει n πελάτες στο σύστημα. Εύρετε τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης P_n . Κάτω από ποιές συνθήκες έχουμε μόνιμη κατάσταση; Έστω $a \rightarrow \infty$. Εύρετε τις P_n και το μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα.

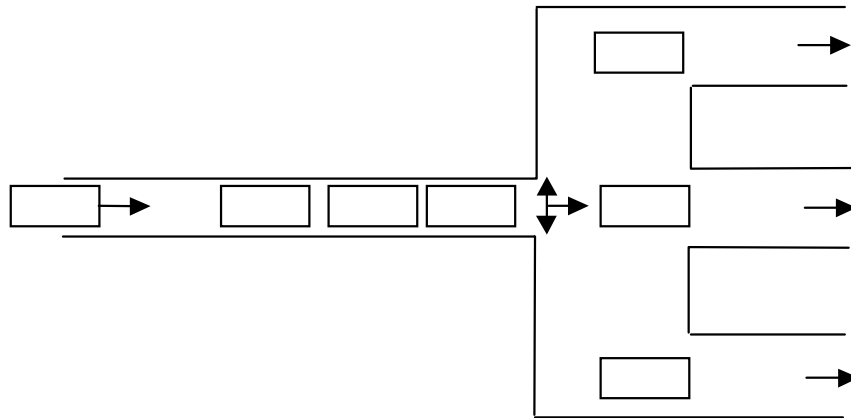
9. Σ' ένα νοσοκομείο οι ασθενείς φθάνουν κατά Poisson με ρυθμό 6/ώρα για να εξετάσουν τα μάτια τους. Η εξέταση διαρκεί κατά μέσον όρο 20 λεπτά ενώ η κατανομή της είναι εκθετική. Υπάρχουν συνολικά 3 οφθαλμίατροι για τις εξετάσεις. Να ευρεθεί πόσοι κατά μέσον όρο περιμένουν για να εξετασθούν, το μέσο χρόνο αναμονής στο νοσοκομείο και το ποσοστό του χρόνου που κατά μέσον όρο καθένας από τους γιατρούς δεν εργάζεται.

10. Κάποιο Κ.Τ.Ε.Ο. έχει τη δομή του σχήματος. Το σύστημα έχει 3 σταθμούς επιθεώρησης και στην ουρά μπορούν να περιμένουν το πολύ 4 αυτοκίνητα. Κάθε σταθμός εξυπηρετεί ένα αυτοκίνητο τη φορά. Οι αφίξεις είναι Poisson με ρυθμό 1 αυτοκίνητο ανά λεπτό στην περίοδο αιχμής ενώ η εξυπηρέτηση είναι εκθετική με μέσο χρόνο 6 λεπτά. Όταν γεμίσει η ουρά δεν επιτρέπονται άλλα αυτοκίνητα. Να ευρεθούν για την περίοδο αιχμής:

α. Ο μέσος αριθμός αυτοκινήτων στο σύστημα.

β. Ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα.

γ. Ο μέσος αριθμός αυτοκινήτων ανά ώρα που δεν μπαίνουν στο σύστημα λόγω πληρότητας.



Υπόδειξη:

Λύστε πρώτα το πρόβλημα γενικά για m σταθμούς ελέγχου και χωρητικότητα του συστήματος K , όπου $K \geq m$. Υπολογίστε τα P_n , P_0 , \bar{N} , T , \bar{N}_q , W . Ύστερα κάνετε την αριθμητική εφαρμογή του προβλήματος.

11. Έστω το σύστημα γέννησης-θανάτου

$$\lambda_n = \lambda, \quad n \geq 0$$

$$\mu_n = n\mu, \quad n > 0.$$

Εύρετε τις διαφορικές-διαφορές εξισώσεις για τις $P_n(t)$. Ορίσετε το μετασχηματισμό z

$P(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) z^n$. Εύρετε τη μερική διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί το $P(z, t)$.

12. Ένας σταθμός τηλεόρασης θέλει να ξέρει το μέσο αριθμό τηλεθεατών για κάποιο πρόγραμμα. Από παρατηρήσεις είναι γνωστό ότι οι τηλεθεατές που ανάβουν την τηλεόραση την ημέρα του προγράμματος ακολουθούν κατανομή Poisson με μέσο όρο 100000/ώρα. Υπάρχουν συνολικά 5 σταθμοί τηλεόρασης και η επιλογή ενός σταθμού θεωρείται τυχαία. Από δημοσκοπήσεις ξέρουμε ότι κατά μέσον όρο ο τηλεθεατής παρακολουθεί τηλεόραση για 90 λεπτά και οι χρόνοι παρακολούθησης είναι περίπου εκθετικά κατανεμημένοι. Εύρετε το μέσον όρο τηλεθεατών για το συγκεκριμένο πρόγραμμα.

13. Μια μεγάλη επιχείρηση δέχεται στην ώρα αιχμής 84.3 τηλεφωνήματα/ώρα. Το κάθε τηλεφώνημα διαρκεί κατά μέσον όρο 0.103 ώρες. Η διοίκηση της επιχείρησης υπολογίζει ότι ένα σήμα κατελιημμένου κάθε 2 ώρες είναι ανεκτό. Πόσες τηλεφωνικές γραμμές πρέπει να έχει η επιχείρηση;

14. Οι πελάτες φθάνουν σε μια τράπεζα με μέσο ρυθμό 4 πελάτες/ώρα. Οι αφίξεις γίνονται κατά Poisson. Οι πελάτες εξυπηρετούνται από μία υπάλληλο με μέσο χρόνο εξυπηρέτησης 10 λεπτά και διασπορά 25 (λεπτά)². Από παρατηρήσεις φαίνεται ότι η εξυπηρέτηση έχει κατανομή Erlang. Υποθέτουμε ότι το κτίριο της τράπεζας είναι μεγάλο και επομένως η ουρά έχει απεριόριστο μήκος. Ο διευθυντής της τράπεζας θέλει να ξέρει πόσο κατά μέσον όρο περιμένει ο κάθε πελάτης μέχρι να φθάσει στην υπάλληλο για εξυπηρέτηση και πόσοι κατά μέσον όρο περιμένουν στην ουρά.

Υπόδειξη:

(1) Εύρετε πρώτα από τα αριθμητικά δεδομένα την τάξη κατανομής Erlang ύστερα υπολογίστε εν γένει το μέσο αριθμό και χρόνο στην ουρά και μετά κάνετε την αριθμητική εφαρμογή. (2) Παρατηρήστε ότι το κεφάλαιο των ομαδικών αφίξεων δίνει τα εργαλεία για την ανάλυση συστήματος με εξυπηρέτηση Erlang για κατάλληλη επιλογή των q_i , θέτοντας $n\mu$ αντί μ . (3) Παρατηρήστε ότι ο μέσος αριθμός βαθμίδων στο

σύστημα είναι $\sum_{i=0}^{\infty} iP_i = \frac{d}{dz} \sum_{i=0}^{\infty} P_i z^i \Big|_{z=1}$. Μία ομάδα n βαθμίδων **στην ουρά** ισοδυναμεί με

έναν πελάτη. Αν **στην εξυπηρέτηση** υπάρχει ένας πελάτης, αυτός δύναται να είναι στη

βαθμίδα $n, n-1, \dots, 2$, ή 1 . Αποδείξτε ότι οι πιθανότητες αυτές είναι ίσες.

15. Σ' ένα σούπερ-μάρκετ ο τρόπος εξυπηρέτησης είναι ο ακόλουθος. Μόλις τελειώσουν οι πελάτες τα ψώνια τους πηγαίνουν σ' έναν χώρο όπου αφήνουν τα καροτσάκια και παίρνουν έναν αριθμό προτεραιότητας. Όταν ένα ταμείο ελευθερωθεί ο πρώτος αριθμός καλείται και ο πελάτης παίρνει το καρότσι του προς το ταμείο. Το κατάστημα καθώς και ο χώρος που περιμένουν οι πελάτες είναι τόσο μεγάλοι που σε εποχές αιχμής να θεωρούνται πρακτικά άπειρης χωρητικότητας. Στην εποχή αιχμής οι πελάτες φθάνουν με κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό 40/ώρα και κάθε πελάτης δαπανά περίπου $3/4$ ώρες κατά μέσον όρο για να ψωνίσει. Οι χρόνοι αγοράς είναι περίπου εκθετικοί. Οι χρόνοι στα ταμεία είναι επίσης περίπου εκθετικοί με μέση τιμή 4 λεπτά ανεξάρτητα από ταμείο. Η διοίκηση του σούπερ-μάρκετ θέλει να ξέρει:

α. Τον ελάχιστο αριθμό ταμείων για την περίοδο αιχμής.

β. Έστω ότι χρησιμοποιούμε τον ελάχιστο αριθμό ταμείων συν ένα ακόμη. Ποιός είναι ο μέσος χρόνος αναμονής μέσα στο χώρο με τα καροτσάκια; Πόσοι πελάτες κατά μέσον όρο ευρίσκονται μέσα σ' όλο το σούπερ-μάρκετ;

16. Σε κάποιο σύστημα παραγωγής υπηρεσιών υπάρχει ένας εξυπηρετών ο οποίος εξυπηρετεί πελάτες που φθάνουν χωρίς μνήμη με μέσο ρυθμό 10/ώρα. Ο εξυπηρετών έχει εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης με μέσο χρόνο 5 λεπτά. Η διοίκηση αποφασίζει να στείλει τον υπάλληλο σε κάποιο μάθημα μετεκπαίδευσης για να μειώσει τη διασπορά του χρόνου εξυπηρέτησης. Μετά το μάθημα ευρίσκεται ότι ο μέσος χρόνος γίνεται 5.5 λεπτά αλλά η τυπική απόκλιση από 5 λεπτά γίνεται τώρα 4 λεπτά.

Το ερώτημα είναι αν αξίζει να γίνει τέτοια εκπαίδευση. Κάντε κάποια διερεύνηση σχετικά με τη μείωση της τυπικής απόκλισης του χρόνου εξυπηρέτησης και την αύξηση της μέσης τιμής του ίδιου χρόνου.

8 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- H. D'Angelo, M. Caramanis, S. Finger, A. Mavretic, Y. Phillis, and E. Ramsden, "Event-driven model of unreliable production lines with storage," *International Journal of Production Research*, **26**(7), pp. 1173-1182, 1988.
- J. A. Buzacott and J. G. Shanthikumar, *Stochastic Models of Manufacturing Systems*, NJ, Prentice Hall, 1993.
- E. Gelenbe and G. Pujolle, *Introduction to Queueing Networks*, Chichester, John Wiley New York 1987.
- D. Gross and C. M. Harris, *Fundamentals of Queueing Theory*, 3rd Ed., John Wiley, 1998.
- L. Kleinrock, *Queueing Systems, vol. I: Theory*, John Wiley, 1975.
- J. Medhi, *Stochastic Models in Queueing Theory*, Academic Press, San Diego 1991.
- J. Murdoch, *Queueing Theory: Worked Examples and Problems*, Macmillan, London 1978.
- H. T. Papadopoulos, C. Heavey, and J. Browne, *Queueing Theory in Manufacturing Systems Analysis and Design*, Chapman & Hall, 1993.
- H. W. Randolph, *Queueing Methods: For Services and Manufacturing*, Englewood Cliffs, Prentice Hall, New Jersey, 1991.
- J. Walrand, *An Introduction to Queueing Networks*, Prentice-Hall, New Jersey, 1988.
- Queueing systems: Theory and applications*. Περιοδικό.
- Δ. Α. Ξηρόκωστα, *Επιχειρησιακή Έρευνα: Εφαρμοσμένη Θεωρία Αναμονής*, Αθήνα 1984.